Introdução ao Controle por Realimentação

1 Introdução

- **Sistema**: designa um arranjo, conjunto ou coleção de componentes conectados ou relacionados de maneira a formar ou agir como uma unidade. Um sistema não é algo necessariamente *físico*. O termo pode ser usado em referência a sistemas econômicos, biológicos, elétricos ou mecânicos, entre outros.
- **Controle**: termo usualmente empregado no sentido de regulação, direcionamento ou comando. Um **sistema de controle** seria um arranjo de componentes conectados ou relacionados de maneira a se auto-regular, ou regular (direcionar, comandar) um outro sistema.
- As definições acima são suficientemente gerais para que, num sentido mais abstrato, qualquer objeto físico possa ser considerado um sistema de controle. Uma simples superfície refletora *controla* raios de luz, refletindo-os de acordo com os seus ângulos de incidência. Qualquer coisa *controla* o ambiente a sua volta, passiva ou ativamente.

- Em Engenharia, **sistema de controle** adquire um sentido mais restrito, designando sistemas utilizados para controlar (ativamente) variáveis como temperatura, pressão e vazão em processos químicos, tensão e frequência em sistemas de geração e distribuição de energia, posição e velocidade angulares de motores, trajetória de veículos, etc.
- **Planta (ou processo, ou sistema controlado)**: é usado para designar o sistema que é objeto da ação do sistema de controle.
- Planta é uma tradução da palavra inglesa *plant*, que também poderia ser traduzida como fábrica ou instalação industrial, ambiente em que muitos sistemas de controle tiveram origem.
- Geralmente utilizamos os termos planta e processo, sem distinção, para designar aquilo que queremos controlar, embora o termo controle de processos esteja mais frequentemente associado ao controle de sistemas que envolvam variáveis como temperatura, pressão e vazão, presentes em indústrias químicas, por exemplo.

Figura 1 – A planta é representada como um bloco relacionando uma variável de entrada a uma variável de saída

- Definimos a seguir alguns termos relativos a quantidades presentes em sistemas de controle. Os valores dessas quantidades geralmente são funções da variável independente tempo.
  - ✓ **Variável (ou comando) de referência**: serve de referência (no sentido de comportamento desejado) para a variável a ser controlada.
  - ✓ **Variável controlada (ou regulada)**: é qualquer variável que se deseja controlar. A variável controlada é geralmente representada pela variável de saída do sistema de controle.

- ✓ **Variável de controle (ou manipulada)**: é a quantidade determinada pela ação de um controlador. A variável de controle é geralmente identificada como a variável de entrada da planta.

- ✓ **Controlador (ou compensador)**: é qualquer sistema conectado à planta e responsável pela definição da variável de controle, visando fazer com que a variável controlada responda de acordo com o especificado pela variável de referência.

- <u>Exemplo</u>: Num tanque para aquecimento de água (planta), as variáveis de controle e controlada são, respectivamente, a quantidade de calor transferida ao tanque e a temperatura resultante da água. Um controlador converteria a temperatura desejada (variável de referência) na quantidade de calor necessária para atingi -la.

2 Malha Aberta × Malha Fechada

- Se as variáveis de referência, de controle e de saída forem denotadas por r, u e y, respectivamente, então é possível representar um **sistema de controle em malha aberta** como na Figura 2.

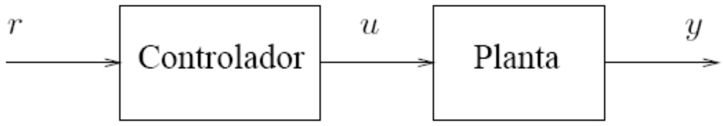


Figura 2 – Sistema de Controle em Malha Aberta

- A principal característica do sistema em malha aberta da Figura 2 é a inexistência de realimentação: os valores assumidos pela variável de controle não dependem dos valores da variável de saída. A ação de controle é função apenas do processamento da variável de referência pelo controlador.

- Em contraste com o sistema de controle em malha aberta da Figura 2, a Figura 3 ilustra um **sistema de controle em malha fechada**, também denotado de **sistema de controle por realimentação**, no sentido de que a saída *y* é medida e comparada com a saída desejada, indicada através da referência *r*, para processamento através do controlador e a consequente definição da ação de controle *u*.

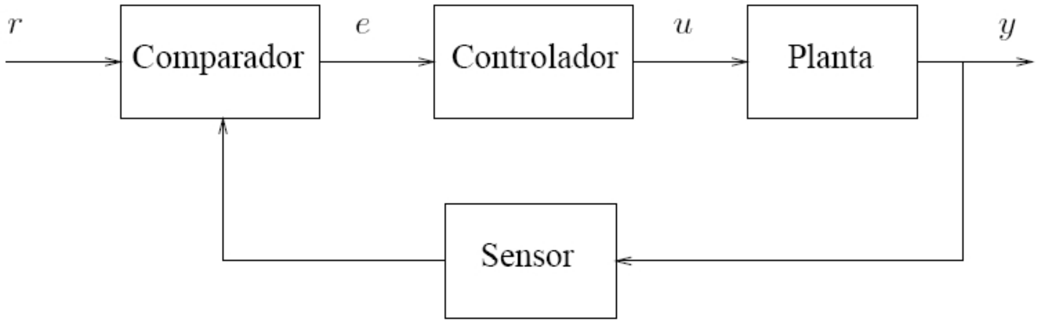


Figura 3 – Sistema de Controle em Malha Fechada

- Dois novos componentes são introduzidos na Figura 3. A saída do sistema é medida através do componente representado no bloco **Sensor**. Em seguida, a referência é comparada com o valor medido, no bloco **Comparador**. A saída do comparador será denotada por *e*. Em geral, a saída do comparador é simplesmente o erro entre a referência e o valor medido, isto é, $e = r - y$.
- Em alguns casos, torna-se conveniente explicitar a parte do sistema de controle responsável pela atuação na planta, como na Figura 4, através do bloco **Atuador**. Em sistemas físicos, o atuador é o componente que gera a potência necessária para produzir a saída do sistema.
- A descrição do atuador pode ser incorporada à do controlador ou à da planta. No entanto, geralmente opta-se por designar de controlador apenas a parte do sistema que é efetivamente projetável, sendo o atuador considerado como parte integrante da planta.

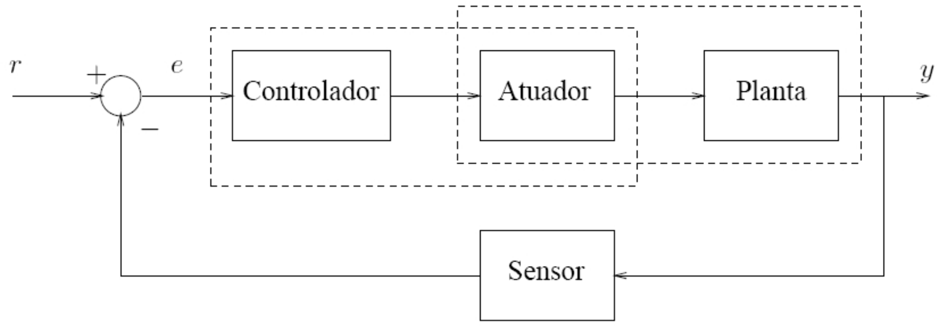


Figura 4 – Sistema de Controle em Malha Fechada com a Presença Explícita do Atuador

3 Custo-benefício do controle por realimentação

- Idealmente, se fosse possível representar a planta, o controlador e o ambiente no qual o sistema de controle está inserido com precisão infinita, não seria necessário utilizar sistemas de controle em malha fechada; sistemas em malha aberta seriam suficientes.

- A principal razão para a utilização de um sistema de controle em malha fechada é a eventual presença de **distúrbios** (ou **perturbações**) agindo sobre o sistema. Logo, ***o principal papel exercido pelo controle em malha fechada é a rejeição de distúrbios***.
- **Distúrbio (perturbação)**: designa genericamente qualquer evento que tenda a afetar o funcionamento do sistema de controle de forma adversa. Pode ser gerado internamente ou externamente ao sistema de controle.
- A tradução de distúrbios em termos de variáveis está diretamente ligada às características da planta, do sensor e do ambiente no qual o sistema em malha fechada opera. A Figura 5 ilustra um sistema de controle em malha fechada no qual variáveis de distúrbio agindo na planta e no sensor são explicitamente consideradas.

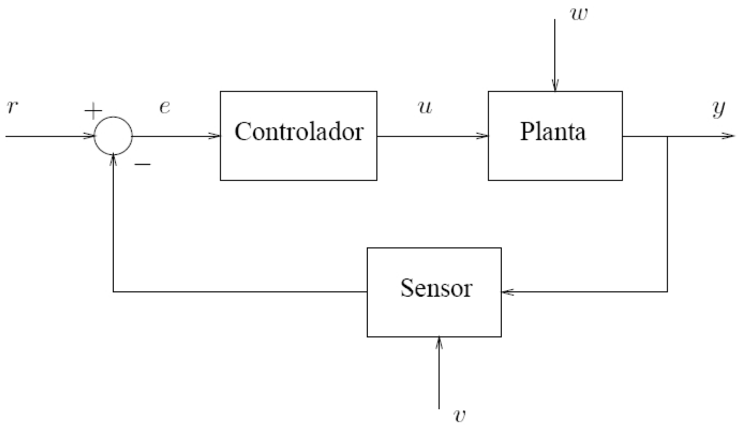


Figura 5 – Sistema de Controle em Malha Fechada Sujeito a Distúrbios

- Se parte da descrição da planta é omitida na etapa de modelagem do sistema, a parte não-modelada pode ser interpretada como um distúrbio interno.
- Sistemas de controle em malha aberta são de implementação e manutenção mais simples e são mais baratos – possuem menos componentes – do que os correspondentes sistemas de controle em malha fechada.

- Sistemas de controle em malha aberta podem ser a única alternativa quando a medição da saída é técnica ou economicamente inviável. Eletrodomésticos, como máquinas de lavar convencionais, podem operar tanto em malha aberta (sendo necessária a existência de referências pré-programadas, controladas por temporizadores) como em malha fechada (sendo necessária a existência de medidores do grau de "impureza" e da quantidade de roupa a ser lavada).
- Se adequadamente projetados, sistemas de controle em malha fechada tornam a saída do sistema relativamente insensível a distúrbios externos ou internos. Em princípio, são mais caros – possuem mais componentes. Por terem a capacidade de compensar distúrbios internos, podem ser implementados com componentes de menor qualidade e custo, sem prejuízo significativo no desempenho global.
- Por outro lado, **a realimentação pode produzir instabilidade**. A questão da estabilidade da malha de controle deve ser cuidadosamente tratada ao se implementar sistemas realimentados.

4 Controle Manual × Controle Automático

- Do ponto de vista de implementação física, classificamos um sistema de controle em malha fechada como manual ou automático:
  - ✓ **Controle manual**: tipo de controle em malha fechada no qual a realimentação é implementada através de um operador humano, que realiza uma ou mais das funções de comparador, controlador ou sensor.
  - ✓ **Controle automático**: tipo de controle em malha fechada no qual as funções de comparador, controlador e sensor são executadas sem a intervenção humana, através de sistemas eletrônicos, hidráulicos ou pneumáticos, por exemplo.
- Com o desenvolvimento da área de sistemas de controle, há uma progressiva substituição de sistemas de controle manuais por sistemas automáticos, particularmente em atividades que demandem assistência constante, ações repetitivas, ou potencialmente perigosas para a integridade física dos operadores.

5 Servomecanismo × Regulação

- Do ponto de vista da função a ser executada, classificamos um sistema de controle em malha fechada como sendo do tipo servomecanismo ou regulação:
  - ✓ **Servomecanismo**: surgiu no contexto do desenvolvimento de certos mecanismos de controle de posição. O termo "problema do servomecanismo" serve para designar o problema de fazer a saída do sistema seguir (acompanhar, rastrear) uma referência especificada e variante no tempo.
  - ✓ **Regulação**: empregado para designar a função de controle que visa manter a saída do sistema próxima a uma referência especificada e constante no tempo. O termo "problema da regulação" designa o problema de regular a saída do sistema.
- O objetivo num problema de regulação é manter uma certa condição nominal de operação, caracterizada pelos valores nominais das variáveis presentes no sistema.

Quando a saída se desvia do seu valor nominal por influência de algum distúrbio, as demais variáveis devem também sofrer desvios no sentido de restaurar a condição anterior ao distúrbio.

- Podemos representar o problema da regulação através da mesma Figura 5, substituindo cada variável pelo respectivo desvio em relação ao seu valor nominal. A referência seria o valor constante zero, uma vez que o objetivo agora seria levar o desvio da saída para zero, restaurando-se, dessa forma, a condição nominal de operação do sistema.

6 Controle por realimentação e o critério de Routh

- Um dos controladores mais utilizados é aquele que define a ação de controle a partir de um ganho fixo e proporcional ao erro entre a referência e a saída da planta. Este é chamado de controlador proporcional (P).
- Extensões possíveis seria considerar também ganhos para a integral do erro e para a derivada do erro, produzindo o chamado controlador proporcional-integral-derivativo.

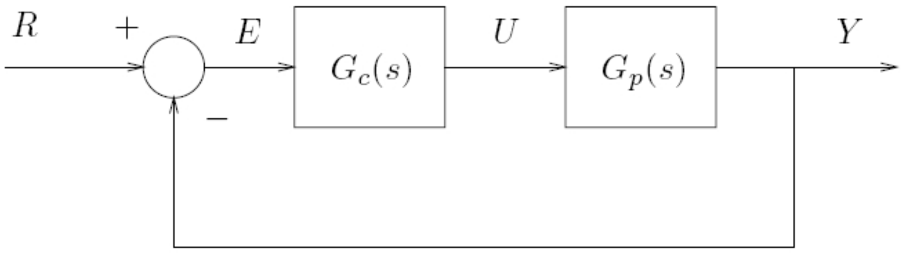


Figura 7 – Controle por realimentação de saída

- A função de transferência resultante da configuração da Figura 7 é dada por:

$$G_F(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

- No caso de controle proporcional (P):

$$G_c(s) = k_p$$

- No caso de controle proporcional-integral-derivativo (PID):

$$G_c(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_d s$$

- Será investigada a seguir a estabilidade da malha fechada apenas para o caso do controle proporcional ao erro entre a referência e a saída, ou seja, apenas o caso em que $G_c(s) = k_p$.
- Dado o sistema de controle por realimentação da Figura 8, responda às seguintes perguntas:

EA616 – Prof. Fernando J. Von Zuben
DCA/FEEC/Unicamp

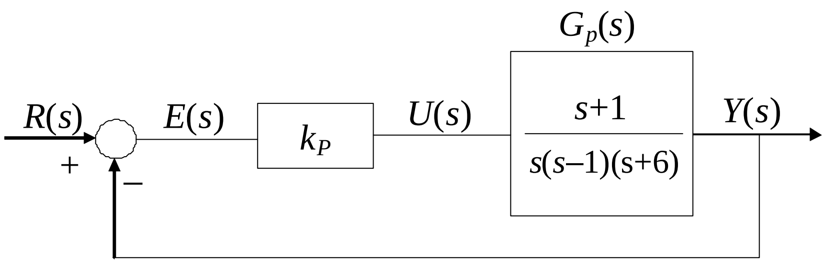


Figura 8 – Controle proporcional

1. A planta $G_p(s)$, tomada isoladamente, é estável?
2. Os pólos do sistema de malha fechada dependem de k_P?
3. Se a resposta à questão 2 for afirmativa, para quais valores de k_P o sistema é estável, ou seja, tem todos os seus pólos no semiplano esquerdo?

Resposta – Questão 1

Como $G_p(s) = \dfrac{s+1}{s(s-1)(s+6)}$, então a equação característica $s(s-1)(s+6) = 0$ fornece um pólo no semiplano direito, indicando que a planta tem uma dinâmica instável.

Resposta – Questão 2

Como $G_p(s) = \dfrac{s+1}{s(s-1)(s+6)} = \dfrac{A(s)}{B(s)}$ e $G_c(s) = k_p$, então a função de transferência resultante do sistema em malha fechada fica:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_F(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{k_P \dfrac{A(s)}{B(s)}}{1+k_P \dfrac{A(s)}{B(s)}} = \frac{k_P A(s)}{B(s)+k_P A(s)}$$

A equação característica fica $B(s)+k_P A(s) = 0$, o que permite concluir que os pólos dependem de k_P, como era de se esperar.

Resposta – Questão 3

Para responder à questão 3, iremos aplicar o Critério de Routh sobre a equação característica.

$$B(s)+k_P A(s) = 0 \Rightarrow s(s-1)(s+6)+k_P(s+1) = 0$$

$$s^3+5s^2+(k_P-6)s+k_P = 0$$

Arranjo de Routh:

s^3	1	k_P-6
s^2	5	k_P
s^1	$\dfrac{4k_P-30}{5}$	0
s^0	k_P	

Para que todos os pólos estejam no semiplano esquerdo, não pode haver mudança de sinal na primeira coluna do arranjo de Routh. Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{4k_P - 30}{5} > 0 \Rightarrow k_P > 7{,}5 \\ k_P > 0 \end{cases}$$

Conclusão: O sistema em malha fechada será estável se $k_P > 7{,}5$.

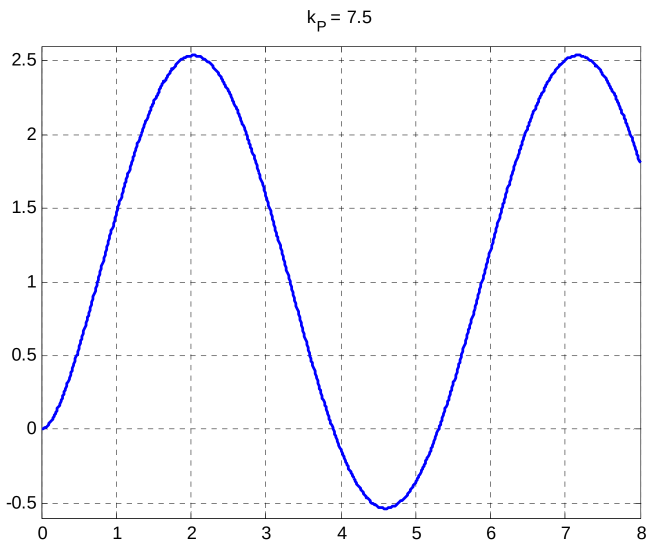
4. Como fica a resposta ao degrau para diferentes valores de $k_P > 7{,}5$?

Resposta – Questão 4

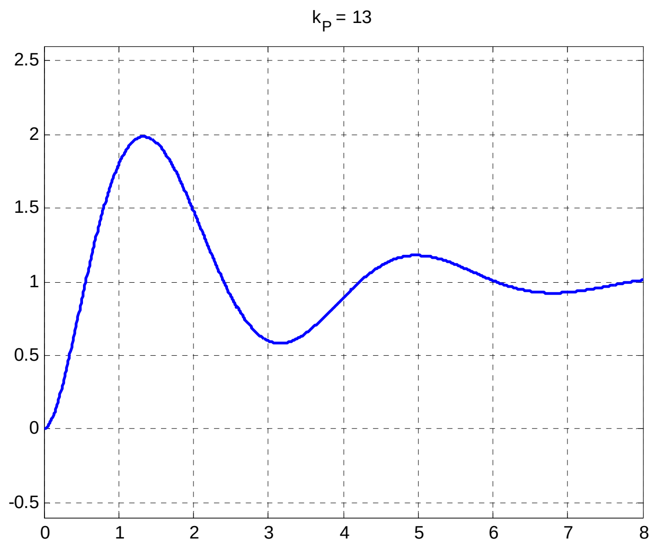
Função de Transferência: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = G_F(s) = \dfrac{k_P A(s)}{B(s) + k_P A(s)} = \dfrac{k_P s + k_P}{s^3 + 5s^2 + (k_P - 6)s + k_P}$

<u>Comandos do Matlab</u>

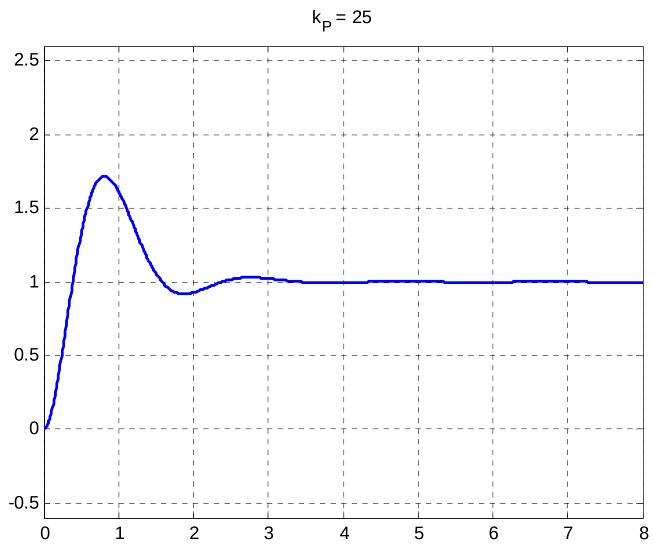
```
t = [0:0.01:8];
u = ones(size(t));
k_P = "inserir valor maior que 7,5";
polos = roots( [ 1  5  k_P–6  k_P ] );
num = [k_P k_P];
den = [1 5 k_P-6 k_P];
sys = tf(num,den);
y = lsim(sys,u,t);
plot(t,y,'LineWidth',2);
axis([0 8 -0.6 2.6]);
title(sprintf('k_P = %g',k_P))
grid;
```

Pólos: $[-5{,}0 \quad +j*1{,}2247 \quad -j*1{,}2247]$



$$\text{Pólos: } [-4{,}0647 \quad -0{,}4677 + j * 1{,}7261 \quad -0{,}4677 - j * 1{,}7261]$$



$$\text{Pólos: } [-1{,}9084 \quad -1{,}5458 + j * 3{,}2727 \quad -1{,}5458 - j * 3{,}2727]$$

7 Controlabilidade

- Representação por espaço de estados para um sistema dinâmico linear, invaqriante no tempo (apenas equação de estado, sem equação de saída):

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0,\ x \in \Re^n \text{ e } u \in \Re^m$$

- Solução no tempo: $x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau,\ t \geq 0$
- Definição: O sistema $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ é **controlável** se para $x_0 \in \Re^n$ (estado inicial) e $x_f \in \Re^n$ (estado final) quaisquer, existe um tempo finito t_f e uma entrada $u(t)$, $0 \leq t \leq t_f$, tais que $x(t_f) = x_f$. Em outras palavras, dados quaisquer dois pontos do espaço de estados, sempre existe uma entrada $u(t)$ que conduz o sistema, em tempo finito, de um ponto para o outro.
- A controlabilidade depende apenas das matrizes A e B e está associada à existência de uma trajetória ligando dois pontos quaisquer do espaço de estados.

- Teorema: O sistema $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ é controlável se e somente se o posto da **matriz de controlabilidade**

$$M_{cont} = \left[B \ \vdots \ AB \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ A^{n-1}B\right]$$

é igual a n, ou seja, se M_{cont} tem posto completo. Repare que a dimensão de M_{cont} é $n \times n{\cdot}m$. O posto de uma matriz está associado ao número de linhas (ou colunas) linearmente independentes, e o valor máximo do posto é dado pelo mínimo entre o número de linhas e o número de colunas. Matrizes que têm posto máximo são chamadas de matrizes de posto completo.

8 Observabilidade

- Definição: O sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$, com $x \in \Re^n$ e $y \in \Re^p$, é **observável** se existe um tempo finito t_f tal que o conhecimento da saída $y(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq t_f$ é suficiente para se determinar a condição inicial x_0.

- A observabilidade depende apenas das matrizes A e C.
- Teorema: O sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ é observável se e somente se o posto da **matriz de controlabilidade**

$$M_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

é igual a n, ou seja, se M_{obs} tem posto completo. Repare que a dimensão de M_{obs} é $p{\cdot}n \times n$.

9 Controle por Realimentação de Estados

- Existem três técnicas básicas de projeto de sistemas de controle por realimentação:

1. Lugar das raízes;
2. Resposta em freqüência;
3. Realimentação de estados.

- Embora haja muitos pontos de equivalência entre as três técnicas de projeto, o emprego de modelos por realimentação de estados tem ampliado seu campo de aplicação em virtude da possibilidade de tratar sistemas no domínio do tempo, além de permitir que o sistema seja, *em algum grau restrito*, não-linear, variante no tempo e MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas).
- Uma desvantagem do controle por realimentação de estados está no fato de ser necessário conhecer todos os estados do sistema dinâmico. Em aplicações práticas, isso implica na possibilidade de acesso a todos os estados e na implementação de um sensor para cada estado.
- Nem sempre os estados estão acessíveis e nem sempre há recursos e tecnologia para obter o valor de todos os estados de um sistema dinâmico. Nesses casos, recorre-se ao conceito de observadores de estados, que correspondem a metodologias de estimação dos estados não-monitorados a partir do conhecimento dos estados monitorados e da existência de um modelo matemático para a planta.

- Para que os observadores de estado operem de forma efetiva, é necessário que o sistema dinâmico seja observável.

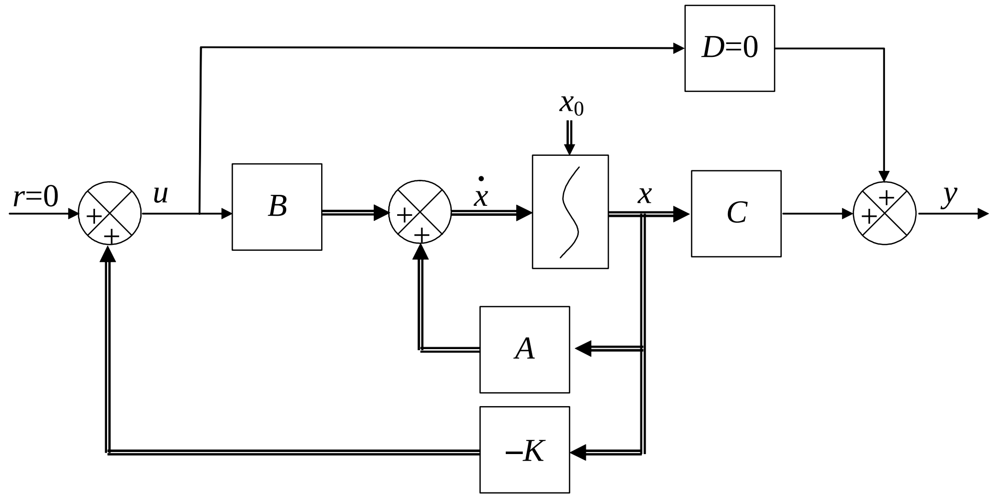


Figura 6 – Fluxograma associado ao controle por realimentação de estados

- Objetivo da lei de controle: determinar o posicionamento de pólos do sistema em malha fechada que permita atender (da melhor forma possível) um elenco de requisitos de resposta transitória e/ou de regime.
- Adotando uma lei de controle na forma:

$$u = -Kx = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  a determinação dos n elementos de K vai se dar de modo a alocar arbitrariamente os n pólos do sistema em malha fechada, caso o sistema dinâmico seja controlável.
- Aqui existe um forte contraste em relação ao projeto no domínio da freqüência, pois lá existe apenas um ganho livre e o posicionamento dos pólos está vinculado aos vários ramos do gráfico do lugar das raízes (a ser visto em EA721).

- Com a realimentação de estados (tendo $r = 0$ e $D = 0$), o sistema dinâmico em malha fechada pode ser descrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x \\ y = Cx \end{cases}$$

- Sendo assim, sua equação característica é dada por:

$$\det[sI - (A - BK)] = 0$$

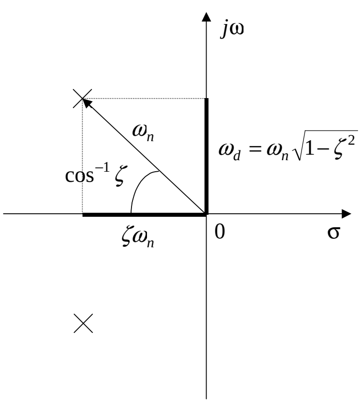
- Considerando que *a posição desejada dos pólos é conhecida*, então:

$$p_c(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = \det[sI - (A - BK)]$$

- Teorema: Se o sistema dinâmico $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ é controlável, então existe $K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$ tal que $\det[sI - (A - BK)] = p_c(s)$ para qualquer polinômio $p_c(s)$ de grau n especificado.
- Assim, os elementos de K são obtidos por simples casamento de coeficientes.

- No entanto, com o uso da forma canônica controlável, o cálculo dos elementos de K pode ser obtido diretamente. Obviamente, o sistema só pode ser transformado em sua forma canônica controlável se ele for controlável.
- A realimentação de estados não deve ser aplicada a sistemas não-controláveis ou fracamente controláveis, pois isto implica a obtenção de valores para os elementos de K não-realizáveis na prática.

Exemplo usando um sistema de 2ª ordem:



- Dado um oscilador não-amortecido, com freqüência natural $\omega_n = \omega_0$, determine o ganho de realimentação de estado de modo a conduzir o sistema ao amortecimento crítico, com os dois pólos em $-2\omega_0 + j0$.
- Descrição por espaço de estado do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- Polinômio característico desejado:

$$(s + 2\omega_0)^2 = s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2$$

- Polinômio característico obtido com realimentação de estado:

$$\det[sI - (A - BK)] = \det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] \right) \right\} = s^2 + k_2 s + \left(\omega_0^2 + k_1\right)$$

- Casamento de coeficientes: $\begin{cases} k_2 = 4\omega_0 \\ \omega_0^2 + k_1 = 4\omega_0^2 \end{cases}$

- Logo, o ganho de realimentação de estado assume a forma:

$$K = [k_1 \quad k_2] = \left[3\omega_0^2 \quad 4\omega_0\right]$$

9.1 Forma canônica controlável

- A forma canônica controlável associada à função de transferência

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

é

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \cdots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n] x + b_n u \end{cases}$$

- Com a matriz de estados nessa forma, denominada forma companheira, o polinômio característico é facilmente obtido, produzindo:

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

- Com realimentação de estados na forma $u(t) = -Kx(t)$, a matriz de estados do sistema em malha fechada assume a forma:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + k_1) & -(a_1 + k_2) & -(a_2 + k_3) & \cdots & -(a_{n-1} + k_n) \end{bmatrix}$$

- Como $A - BK$ também se encontra numa forma companheira, o polinômio característico do sistema em malha fechada é dado por:

$$\det(sI - A + BK) = s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1)$$

- Definindo o polinômio desejado como:

$$p_c(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_1 s + q_0$$

da identidade $\det(sI - A + BK) = p_c(s)$ resulta um sistema trivial de n equações lineares a n incógnitas, com solução:

$$\begin{cases} k_1 = q_0 - a_0 \\ k_2 = q_1 - a_1 \\ \quad\vdots \\ k_n = q_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$$

- Se a função de transferência do sistema é conhecida, é simples obter a forma canônica controlável e, por conseguinte, os ganhos de realimentação.

- Para sistemas na representação por espaço de estados e que não estão na forma canônica controlável, mas são controláveis, o ganho de realimentação de estado pode ser obtido diretamente pela fórmula de Ackermann

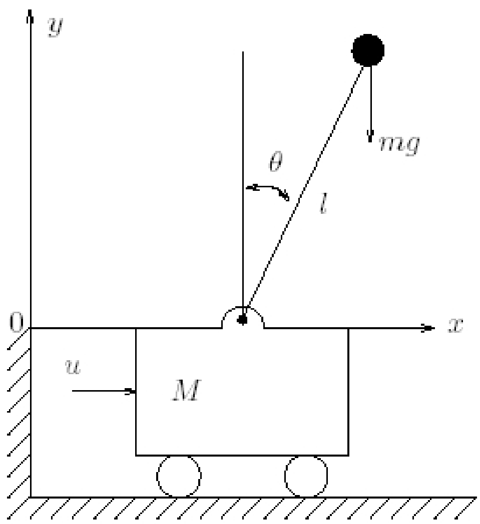
$$K = \underbrace{[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]}_{n \text{ componentes}} (M_{cont})^{-1} p_c(A)$$

onde $p_c(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_1 s + q_0$ é o polinômio característico desejado para o sistema em malha fechada, de modo que

$$p_c(A) = A^n + q_{n-1}A^{n-1} + \cdots + q_1 A + q_0 I$$

- O comando do Matlab ⟨K = acker(A,B,P)⟩ ou ⟨K = place(A,B,P)⟩ fornece diretamente a matriz de ganhos K a partir do conhecimento de A, B e da posição desejada para os pólos, fornecidos em P.
- Os comandos do Matlab ⟨ctrb⟩ e ⟨obsv⟩ fornecem as matrizes de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, a partir dos pares (A, B) e (A, C).

10 Modelo matemático do pêndulo invertido



$$\begin{cases} (M+m)\dfrac{d^2x}{dt^2} + ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = u \\ l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{d^2x}{dt^2} = g\theta \end{cases}$$

- Tomando como variáveis de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

resulta a seguinte equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

10.1 Controle por realimentação de estados supondo acesso a todos os estados (CASO 1)

- Equação de saída:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

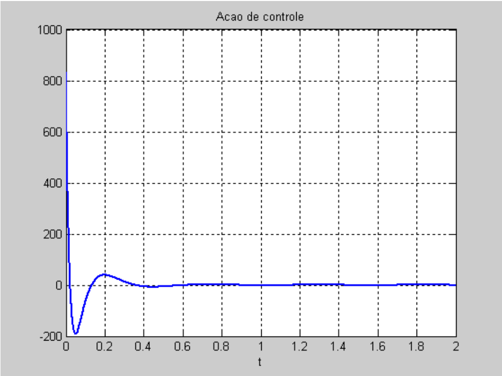
- Parâmetros da planta: $M = 1$; $m = 0,2$; $l = 0,3$.
- Condição inicial: $\theta = 0,3 \text{ rad} \cong 17,2^o$; $\dot{\theta} = x = \dot{x} = 0$
- Especificações de desempenho: $\xi = 0,5$ e $\omega_n = 13,5$ rad/s
- Pólos dominantes: $-6,75 \pm j11,69$
- Demais pólos (parte real = 5 vezes 6,75): $-33,75 \pm j10$

- Como calcular o ganho K tal que a matriz $A-BK$ tenha como pólos $P=\begin{bmatrix}-6{,}75+j11{,}69 & -6{,}75-j11{,}69 & -33{,}75+j10 & -33{,}75-j10\end{bmatrix}^T$?
- Comando do MATLAB: **`K = place(A,B,P);`**
- A multiplicidade dos pólos não pode ser maior que o número de entradas.
- Ganho de realimentação de estados resultante:

$$K=\begin{bmatrix}-2782{,}9 & -290{,}6 & -6904{,}6 & -887{,}7\end{bmatrix}$$

AÇÃO DE CONTROLE:

$u=-Kx$

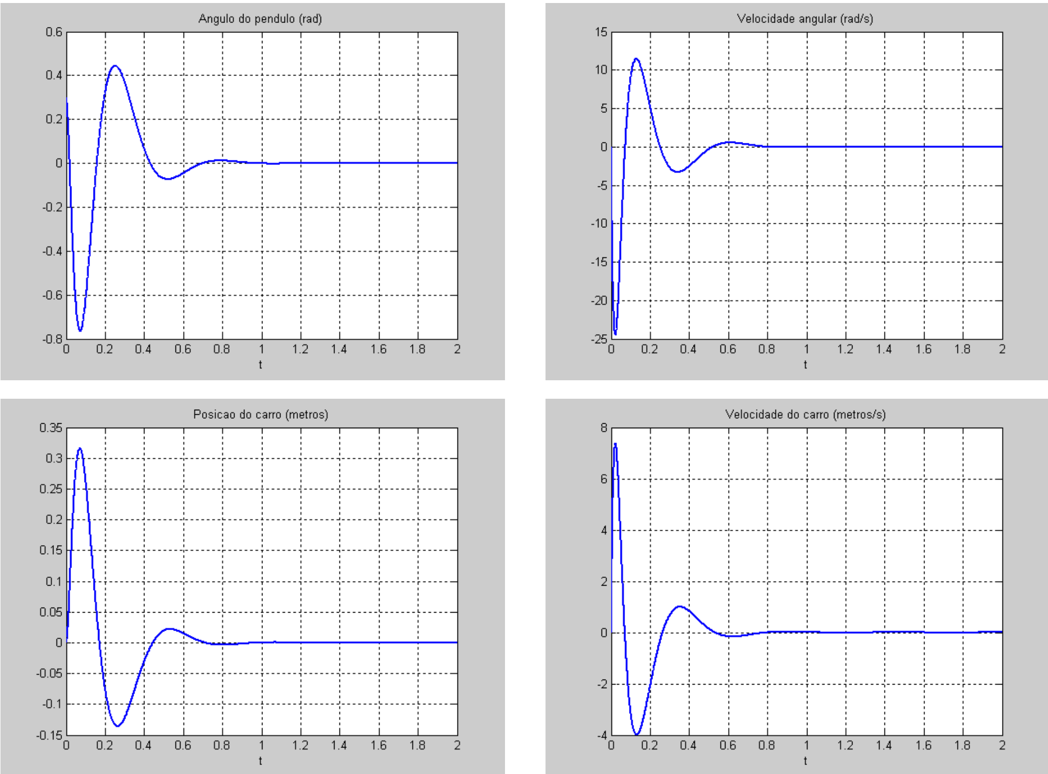


VALOR MÁXIMO:

834,8729

VALOR MÍNIMO:

–190,2410



10.2 Controle por realimentação de estados supondo acesso a todos os estados (CASO 2)

- Equação de saída:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

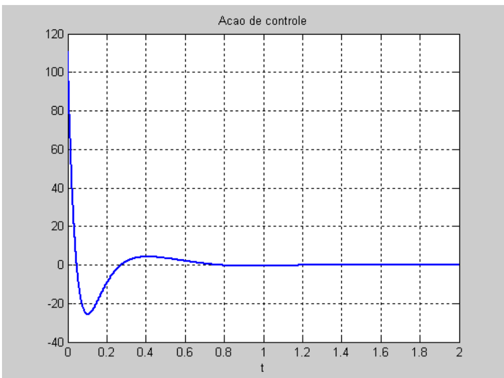
- Parâmetros da planta: M = 1; m = 0,2; l = 0,3.
- Condição inicial: $\theta = 0{,}3\,\text{rad} \cong 17{,}2^o$; $\dot{\theta} = x = \dot{x} = 0$
- Especificações de desempenho: $\xi = 0{,}5$ e $\omega_n = 6{,}75$ rad/s
- Pólos dominantes: $-3{,}375 \pm j5{,}845$
- Demais pólos (parte real = 5 vezes os dominantes): $-16{,}875 \pm j10$

- Ganho de realimentação de estado resultante:

$$K = [-370{,}0 \quad -50{,}1 \quad -536{,}0 \quad -126{,}4]$$

AÇÃO DE CONTROLE:

$u = -Kx$

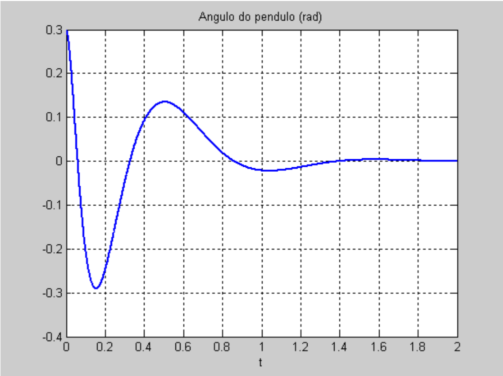


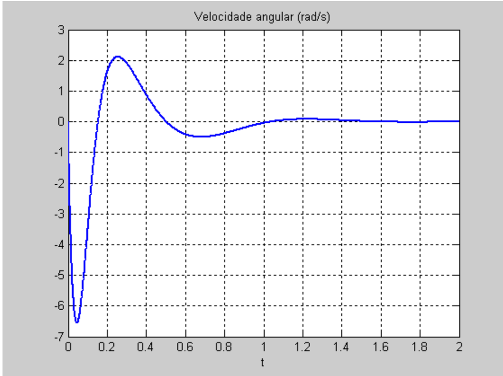
VALOR MÁXIMO:

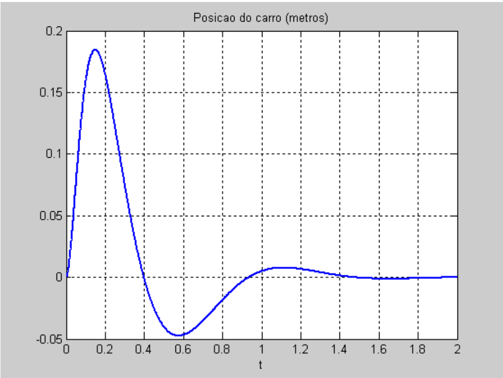
111,0054

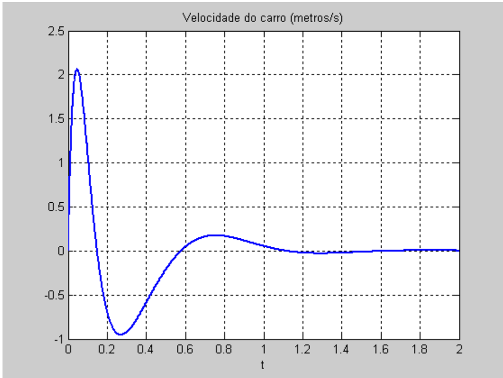
VALOR MÍNIMO:

–25,5331









11 Desenvolvimento da teoria de controle

- A seguir, é apresentada uma tabela que procura descrever o desenvolvimento da teoria de controle, com uma divisão em três períodos mais significativos.

	Controle Clássico 1930-1960	Controle Moderno 1960-1980	Controle Robusto 1980-nossos dias
Análise	Diagramas de Bode Critério de Nyquist Critério de Routh-Hurwitz Lugar das Raízes (Evans) Margens de Ganho e Fase	Modelo por Espaço de Estados Controlabilidade Observabilidade Processos Estocásticos	Decomposição em Valores Singulares Análise μ Fatorização Espectral Inequações Matriciais
Síntese	Controladores PID Compensação Lead-Lag	Filtro de Kalman PLQ PLQG	Síntese H_∞ Síntese H_2/H_∞ Síntese μ
Paradigma	Domínio da freqüência SISO	Domínio do tempo MIMO	Domínio da freqüência, com modelos por espaço de estados

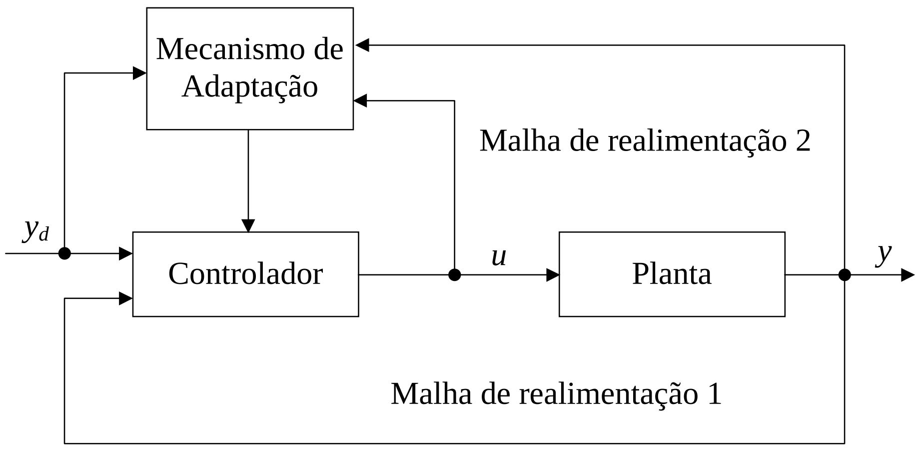
12 Controle Adaptativo

- O principal objetivo de controle por realimentação é obter um sistema que seja capaz de manter um nível esperado de desempenho mesmo frente a perturbações e variações nas características do sistema de controle, visto que a realimentação tem um papel importante na atenuação de perturbações.
- No entanto, algumas plantas apresentam variações tão amplas e com efeitos significativos sobre o comportamento dinâmico que um ganho de realimentação linear e com coeficientes constantes é incapaz de fornecer a flexibilidade necessária para atender as especificações de desempenho. Sendo assim, passa a ser necessário medir continuamente estas variações e, então, ajustar devidamente os parâmetros de controle.
- Logo, controle adaptativo é a denominação atribuída à ação de controle de sistemas capazes de modificar seus próprios parâmetros em resposta a alterações verificadas em algum módulo que esteja sendo monitorado.

- Neste sentido, adaptar-se significa mudar o comportamento em resposta a novas circunstâncias de operação, com o objetivo de manter um nível esperado de desempenho.
- Na verdade, controle adaptativo é uma extensão natural de sistemas realimentados clássicos (os quais já se ajustam a novas circunstâncias), buscando projetar controladores dotados de maior grau de autonomia.
- É importante mencionar que a teoria de controle adaptativo foi muito ativa nos anos 50, pois a motivação era desenvolver sistemas de controle de vôo para aeronaves supersônicas, já que ganhos constantes não eram suficientes para sustentar a operação na região supersônica.
- Muitas das principais idéias de controle adaptativo foram concebidas nesta época, mas não havia *hardware* para implementações confiáveis, já que se empregava computadores analógicos dedicados.

- Sistemas de controle adaptativo são caracterizados pela existência de duas malhas de realimentação:

1. Malha de controle convencional;
2. Malha de adaptação, responsável por monitorar o desempenho e ajustar os parâmetros do controlador de acordo com as condições de operação em vigor.



13 Referências bibliográficas

Parte deste material foi baseado em Notas de Aula do curso EA721, Prof. Paulo Augusto Valente Ferreira (FEEC/Unicamp).

Referências específicas para controle adaptativo

ASTRÖM, K.J. "Theory and Applications of Adaptive Control - A Survey", *Automatica*, vol. 19, pp. 471-486, 1983.

ASTRÖM, K.J. "Lesson 9: Adaptive Control", *in* Masten, M.K. (ed.) Modern Control Systems, IEEE Press, 1995.

ASTRÖM, K.J. & WITTENMARK, B. "Adaptive Control", 2nd edition, Addison Wesley Publishing Company, 1995.

ASTRÖM, K.J. & WITTENMARK, B. "On Self-Tuning Regulators", *Automatica*, vol. 9, pp. 185-199, 1973.

CHALAM, V. "Adaptive Control Systems", Marcel Dekker, 1987.

LANDAU, Y.D. "Adaptive Control: The Model Reference Approach", New York: Marcel Dekker, 1979.

LJUNG, L. "System Identification - Theory for the User", Prentice Hall, 1987.

NARENDRA, K.S. & ANNASWAMY, A.M. "Stable Adaptive Systems", Prentice Hall, 1989.

ORTEGA, R. & TANG, Y. "Robustness of Adaptive Controllers - A Survey", *Automatica*, vol. 25, no. 5, pp. 651-677, 1989.

WHITAKER, H.P., YAMRON, J. & KEZER, A. "Design of model-reference adaptive control systems for aircraft", *Report R-164*, Instrumentation Laboratory, MIT, Cambridge, 1958.

WITTENMARK, B., ASTRÖM, K.J. "Pratical Issues in the Implementation of Self-tuning Control", *Automatica*, vol 20, pp. 595-605, 1984.