

9 – Diagramas de Bode

9.1 – Introdução aos diagramas de Bode	3
9.2 – A Função de Transferência	4
9.3 – Pólos e zeros da Função de Transferência	8
■ Equação característica	8
■ Pólos da Função de Transferência	8
■ Zeros da Função de Transferência	8
■ Exemplo 9.1	8
■ Exemplo 9.2	9
■ Exemplo 9.3	9
9.4 – Os factores básicos em ‘s’ para a construção de um diagrama de Bode	10
9.5 – Os factores básicos em “ $j\omega$ ” para a construção de um diagrama de Bode	12
9.6 – Desmembramento de funções $G(s)$ em factores básicos	14
■ Exemplo 9.4	14
■ Exemplo 9.5	15
9.7 – Diagramas de Bode dos factores básicos	16
■ O ganho de Bode (K_B)	17
■ Factor integral $(j\omega)^{-1}$	19

■ Outros factores integrativos $(j\omega)^{-2}, (j\omega)^{-3}, \dots, (j\omega)^{-n}$	21
■ Factores derivativos $j\omega, (j\omega)^2, (j\omega)^3, \dots, (j\omega)^n$	23
■ Factor pólo primeira ordem $(1 + j\omega T)^{-1}$	24
■ Factores pólos múltiplos $(1 + j\omega T)^{-2}, (1 + j\omega T)^{-3}, \dots, (1 + j\omega T)^{-n}$	28
■ Factores zeros simples e múltiplos $(1 + j\omega T)^1, (1 + j\omega T)^2, \dots, \dots, (1 + j\omega T)^n$	32
■ Factores pólos quadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1, -2, \dots, -n}$	34
■ Factores zeros quadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{1, 2, \dots, n}$	39
9.8 – Factores básicos com sinais negativos	39
■ Exemplo 9.6	39
■ Exemplo 9.7	41
■ Exemplo 9.8	42
■ Exemplo 9.9	43
■ Exemplo 9.10	44
■ Exemplo 9.11	45
■ Exemplo 9.12	46
■ Exemplo 9.13	47
9.9 – Exemplos adicionais de construção diagramas de Bode (<i>módulo e fase</i>)	48
■ Exemplo 9.14	48
■ Exemplo 9.15	49
■ Exemplo 9.16	49
■ Exemplo 9.17	50
■ Exemplo 9.18	51
■ Exemplo 9.19	50
■ Exemplo 9.20	51
■ Exemplo 9.21	53

Diagramas de Bode

9.1 – Introdução aos diagramas de Bode

Neste capítulo estudaremos os diagramas de Bode (“*Bode plots*”) que levam este nome devido à *Hendrik Wade Bode* (1905-1982), um engenheiro americano que actuava principalmente nas áreas de electrónica, telecomunicações e sistemas.



Fig. 9.1 – Hendrik Wade Bode (1905-1982), americano.

Os diagramas de Bode (de *módulo* e de *fase*) são uma das formas de caracterizar sinais no domínio da frequência.

9.2 – A Função de Transferência

Os sinais são representados no domínio da frequência por funções de s :

$$X(s), Y(s), \text{ etc.}$$

como já vimos no capítulo 6 (Transformadas de Laplace, $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ e $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$) ou por funções de $j\omega$

$$X(j\omega), Y(j\omega), \text{ etc.}$$

como já vimos no capítulo 8 (Transformadas de Fourier, $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$ e $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(j\omega)$).

Na verdade as Transformadas de Laplace e as Transformadas de Fourier são representações que estão muito relacionadas uma com a outra. Em muitos casos, se substituirmos 's' por 'j ω ', isto é, fazendo-se 's' ser um número complexo com parte real *nula* e parte imaginária ' ω ',

$$s = 0 + j\omega = j\omega$$

obtemos a Transformadas de Fourier a partir da Transformada de Laplace,

$$X(s) = X(0+j\omega) = X(j\omega), Y(s) = Y(0+j\omega) = Y(j\omega), \text{ etc.}$$

Se $x(t)$ é a entrada de um sistema e $y(t)$ é a saída deste mesmo sistema, em certas aplicações podem ser mais interessante representar no diagrama de blocos estes sinais

$$X(s), X(j\omega), Y(s) \text{ e } Y(j\omega)$$

no domínio da frequência, em vez de no domínio do tempo conforme é ilustrado na figura 9.2.



Fig. 9.2 – Diagrama de blocos com os sinais de entrada e saída representados no domínio da frequência.

onde $G(s)$ e $G(j\omega)$ são a resposta impulsional do sistema conforme visto nas secções 5.10 (no capítulo 5, Transformada de Laplace) e 8.5 (no capítulo 8, Transformada de Fourier) respectivamente.

Note que lá a resposta impulsional do sistema era, de forma geral, $H(s)$ e $H(j\omega)$ enquanto que aqui, de forma geral, será utilizado a notação $G(s)$ e $G(j\omega)$.

No capítulo 4, sobre Sistemas e no capítulo 8 sobre Transformadas de Fourier nós vimos alguns resultados clássicos sobre SLIT (*sistemas lineares e invariantes no tempo*). Por exemplo, no caso particular da entrada $x(t) = \text{impulso unitário}$,

$$x(t) = u_0(t)$$

então a saída $y(t) = g(t) = \text{a “resposta impulsional do sistema”}$.

Sabendo-se a *resposta impulsional* $g(t)$ de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) podemos saber a saída $y(t)$ para qualquer entrada $x(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau \\ &= x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) \cdot g(\tau) \cdot d\tau \end{aligned}$$

Ou seja, a saída $y(t)$ é a convolução entre a resposta impulsional $g(t)$ e a entrada $x(t)$. Isso que implica que

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= G(j\omega) \cdot X(j\omega) \\ &= X(j\omega) \cdot G(j\omega). \end{aligned}$$

onde

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$X(j\omega) = \text{Transformada de Fourier de } x(t),$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$$

$$Y(j\omega) = \text{Transformada de Fourier de } y(t), \text{ e}$$

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$$G(j\omega) = \text{Transformada de Fourier de } g(t)$$

e que está ilustrado na figura 9.3 abaixo.

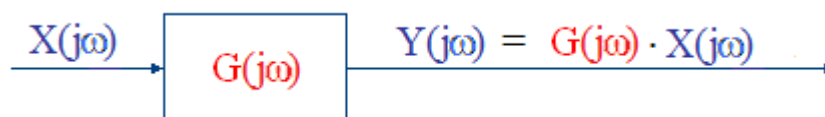


Fig. 9.3 – Diagrama de blocos com os sinais de entrada $x(t)$ e de saída $y(t)$ e resposta impulsional $h(t)$, todos representados no domínio da frequência, em ‘ $j\omega$ ’: $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ e $G(j\omega)$.

Este resultado se deve ao facto que:

a transformada da convolução é o produto das transformadas.

a propriedade da Convolução para as Transformadas de Fourier, que foi vista na secção 8.4 (no capítulo 8, Propriedades da Transformada de Fourier).

Por esta razão pode-se expressar $G(j\omega)$ como a razão entre o sinal de saída tomado no domínio da frequência [$Y(j\omega)$] e o sinal de entrada, também tomado no domínio da frequência [$X(j\omega)$], quando as condições iniciais do sistema são nulas

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad \text{eq. (9.1)}$$

que é chamada de ‘*função de transferência*’ do sistema.

Mas esta afirmação acima valida para as “Transformadas de Fourier”, também vale para as “Transformadas de Laplace”, conforme visto no capítulo 5. Logo:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \cdot X(s) \\ &= X(s) \cdot G(s). \end{aligned}$$

onde

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$X(s)$ = Transformada de Laplace de $x(t)$,

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$$

$Y(s)$ = Transformada de Laplace de $y(t)$, e

$$G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$G(s)$ = Transformada de Laplace de $h(t)$

e que está ilustrado na figura 9.4 abaixo.

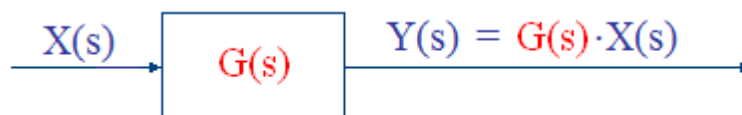


Fig. 9.4 – Diagrama de blocos com os sinais de entrada $x(t)$ e de saída $y(t)$ e resposta impulsional $h(t)$, todos representados no domínio da frequência, em ‘s’: $X(s)$, $Y(s)$ e $G(s)$.

Mais uma vez este resultado se deve ao facto que:

a transformada da convolução é o produto das transformadas,

a propriedade da Convolução, mas agora para Transformada de Laplace, vista na secção 5.4 (no capítulo 5, Propriedades da Transformada de Laplace).

Por esta razão pode-se expressar $G(s)$ como a razão entre o sinal de saída tomado no domínio da frequência [$Y(s)$] e o sinal de entrada também tomado no domínio da frequência [$X(s)$], quando as condições iniciais do sistema são nulas

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \text{eq. (9.2)}$$

que também é chamada de '*função de transferência*' do sistema.

Portanto a *função de transferência* de um sistema linear invariante no tempo (SLIT) representada no domínio da frequência:

$$G(s) \quad \text{ou} \quad G(j\omega),$$

conforme definidas nas equações eq. (9.1) e eq. (9.2), muito comumente são fracções racionais, ou seja, fracções cujo numerador e o denominador são polinómios, seja em 's':

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad \text{eq. (9.3)}$$

ou em ' $j\omega$ '

$$G(j\omega) = \frac{q(j\omega)}{p(j\omega)} \quad \text{eq. (9.4)}$$

onde $q(s)$ e $p(s)$ são polinómios em 's' do tipo

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

e $p(j\omega)$ e $q(j\omega)$ são polinómios em ' $s = j\omega$ ' do tipo

$$a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0$$

9.3 – Pólos e zeros da Função de Transferência

Considere agora a função de transferência $G(s)$ de um sistema, conforme foi definida na eq. (9.2), depois de reduzida para forma de fração racional da eq. (9.3)

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

e suponha que todos as eventuais raízes comuns de $q(s)$ e $p(s)$ tenham sido canceladas e portanto esta expressão acima está na forma irredutível.

■ Equação Característica:

O polinómio $p(s)$ é chamado de *polinómio característico* de $G(s)$, ou o *polinómio característico* do sistema. A equação

$$p(s) = 0$$

é chamada de a “*equação característica*” do sistema.

■ Pólos da função de transferência:

As raízes do *polinómio característico* são chamadas de *pólos* de $G(s)$ ou *pólos* do sistema. Ou seja, os pólos são as soluções da *equação característica*.

■ Zeros da função de transferência:

As raízes do numerados de $G(s)$ ($q(s)$) são chamadas de *zeros* de $G(s)$ ou *zeros* do sistema. Ou seja, os zeros são as soluções da *equação* $q(s) = 0$.

De maneira semelhante se define os *pólos* e *zeros* de uma resposta impulsional $G(s)$.

Exemplo 9.1: Considere a *função de transferência* $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{2 \cdot (s+30)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

É fácil de se verificar que $G(s)$ tem um zero em

$$s = -30$$

e quatro pólos, respectivamente em:

$$s = 0, \quad s = -2, \quad \text{e} \quad s = -1 \pm j$$

sendo que: 2 são reais e 2 são complexos.

Como $s = 0$ é um pólo de $G(s)$, costuma-se dizer que este sistema tem um “*pólo na origem*”.

A equação característica deste sistema é:

$$p(s) = s(s+2)(s^2+2s+2) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s$$

□

Exemplo 9.2: Considere agora a *função de transferência* $G_1(s)$ dada por

$$G_1(s) = \frac{10^5 s}{(s+10)(s^2+10^2s+10^4)}$$

Nitidamente $G_1(s)$ tem um “*zero na origem*”, ou seja, em

$$s = 0$$

e três pólos, respectivamente em

$$s = -10 \quad \text{e} \quad s = -50 \pm j \cdot 50\sqrt{3}$$

A equação característica deste sistema é:

$$p_1(s) = (s+10)(s^2+10^2s+10^4) = s^3 + 110s^2 + 11 \times 10^3 s + 10^5$$

□

Exemplo 9.3: Considere agora a *função* $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{10s^2}{(s+a)^2 (s+b^2)(s-c)},$$

$G(s)$ tem um “*zero duplo na origem*” (i.e., em $s = 0$) e quatro pólos, respectivamente em

$$s = -a \text{ (duplo)}, \quad s = -b^2 \quad \text{e} \quad s = c.$$

□

9.4 – Os factores básicos em ‘s’ para a construção de um diagrama de Bode

Vamos apresentar aqui os factores básicos para a construção de um diagrama de Bode de $G(s)$.

Estes factores básicos são funções racionais em ‘s’. Qualquer $G(s)$ da forma da eq. (9.4) acima pode ser desmembrado em factores básicos e com isso a construção de um esboço do diagrama de Bode se torna mais simples.

Na próxima secção apresentaremos de forma semelhante os factores básicos em ‘ $j\omega$ ’ para a construção de um diagrama de Bode.

FACTORES BÁSICOS EM ‘s’:

■ O ganho de Bode (K_B)

$$G(s) = K_B$$

■ Factores integrativos [*pólos na origem*]: $(1/s)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad G(s) = \frac{1}{s^2}, \quad G(s) = \frac{1}{s^3}, \quad \dots$$

■ Factores derivativos [*zeros na origem*]: s^n , $n = 1, 2, \dots$

$$G(s) = s, \quad G(s) = s^2, \quad G(s) = s^3, \quad \dots$$

■ Factores de 1ª ordem do tipo “*pólos reais*”: $1/(Ts + 1)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$G(s) = \frac{1}{(Ts+1)}, \quad G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^2}, \quad G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^3}, \quad \dots$$

■ Factores de 1ª ordem do tipo “*zeros reais*”: $(Ts + 1)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$G(s) = (Ts+1), \quad G(s) = (Ts+1)^2, \quad G(s) = (Ts+1)^3, \quad \dots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo “*pólos complexos*”:

$$1/[1+2\zeta(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2]^n, n = 1, 2, \dots$$

$$G(s) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right]},$$

$$G(s) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^2},$$

$$G(s) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^3}, \dots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo “*zeros complexos*”:

$$[1+2\zeta(s/\omega_n)+(s/\omega_n)^2]^n, n = 1, 2, \dots$$

$$G(s) = 1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + \frac{s^2}{\omega_n^2},$$

$$G(s) = \left[1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^2,$$

$$G(s) = \left[1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right]^3, \dots$$

9.5 – Os factores básicos em ‘j ω ’ para a construção de um diagrama de Bode

Vamos apresentar aqui os factores básicos para a construção de um diagrama de Bode de $G(j\omega)$.

Estes factores básicos são na verdade derivados dos já vistos acima para $G(s)$. Eles são as mesmas funções racionais em ‘s’ da secção anterior, depois de substituir-se s por $j\omega$.

$$s = 0 + j\omega = j\omega$$

Qualquer $G(j\omega)$ da forma da eq. (9.4) acima pode ser desmembrado em factores básicos e com isso a construção de um esboço do diagrama de Bode se torna mais simples.

FACTORES BÁSICOS EM ‘S’:

■ O ganho de Bode (K_B)

$$G(j\omega) = K_B$$

■ Factores integrativos [*pólos na origem*]: $(1/j\omega)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}, \quad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^3}, \quad \dots$$

■ Factores derivativos [*zeros na origem*]: $(j\omega)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$G(j\omega) = j\omega, \quad G(j\omega) = (j\omega)^2, \quad G(j\omega) = (j\omega)^3, \quad \dots$$

■ Factores de 1ª ordem do tipo “*pólos reais*”: $1/(1+j\omega T)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T+1)}, \quad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T+1)^2}, \quad G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T+1)^3}, \quad \dots$$

■ Factores de 1ª ordem do tipo “*zeros reais*”: $(1+j\omega T)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$$G(j\omega) = (j\omega T+1), \quad G(j\omega) = (j\omega T+1)^2, \quad G(j\omega) = (j\omega T+1)^3, \quad \dots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo “*pólos complexos*”:

$$1/[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^n, n = 1, 2, \dots$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]},$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2},$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^3}, \dots$$

- Factores de 2ª ordem ou quadráticos, do tipo “*zeros complexos*”:

$$[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^n, n = 1, 2, \dots$$

$$G(j\omega) = 1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2,$$

$$G(j\omega) = \left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2,$$

$$G(j\omega) = \left[1+2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^3, \dots$$

9.6 – Desmembramento de funções $G(s)$ em factores básicos

Qualquer função transferência $G(s)$ pode facilmente ser reescrita somente com os factores básicos definidos acima nas duas secções anteriores.

Vamos ilustrar isso com um exemplo:

Exemplo 9.4: Considere agora a *função* $G(s)$ vista no exemplo 9.1 que é dada por

$$G(s) = \frac{2(s+30)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Agora, substituindo-se $(s + 30)$ no numerador por

$$(s+30) = 30 \cdot \left(\frac{s}{30} + 1 \right)$$

obtemos a expressão abaixo que já tem um fator básico no numerador:

$$G(s) = \frac{2 \cdot 30 \left(\frac{s}{30} + 1 \right)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Semelhantemente, para o denominador, uma vez que um dos 3 factores já é um factor básico (integrativo, pólo na origem), substituindo-se os outros dois:

$$(s+2) = 2 \cdot \left(\frac{s}{2} + 1 \right)$$

e

$$(s^2 + 2s + 2) = 2 \cdot \left(\frac{s^2}{2} + s + 1 \right)$$

obtemos a expressão abaixo que já tem três factores básicos no denominador:

$$G(s) = \frac{2 \cdot 30 \left(\frac{s}{30} + 1 \right)}{2 \cdot 2 \cdot s \cdot \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{s^2}{2} + s + 1 \right)}$$

Finalmente, juntando as constantes (do numerador e do denominador), obtém-se:

$$K_B = \frac{2 \times 30}{2 \times 2} = 15$$

e podemos escrever a expressão abaixo:

$$G(s) = \frac{15 \cdot \left(\frac{s}{30} + 1 \right)}{s \cdot \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{s^2}{2} + s + 1 \right)}$$

que está inteiramente escrita em termos de factores básicos na forma:

$$G(s) = \frac{K_B \cdot (T's + 1)}{s \cdot (Ts + 1) \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right)}$$

onde:

$$K_B = 15 \qquad T = 1/2 \qquad T' = 1/30$$

$$\omega_n = \sqrt{2} \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

□

Exemplo 9.5:

Para escrever a função de transferência $G(s)$ do exemplo anterior na forma de factores básicos em $j\omega$ e então obtermos $G(j\omega)$ basta substituir no resultado obtido para $G(s)$,

$$s = 0 + j\omega,$$

ou seja,

$$s = j\omega$$

pois esta é a única diferença entre as duas formas $G(s)$ e $G(j\omega)$.

Fazendo isso, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{15 \cdot \left(\frac{j\omega}{30} + 1 \right)}{j\omega \left(\frac{j\omega}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{(j\omega)^2}{2} + j\omega + 1 \right)} = \\
 &= \frac{15 \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{30} \right)}{j\omega \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{2} \right) \cdot \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{2} \right) + j\omega \right]}
 \end{aligned}$$

□

9.7 – Diagramas de Bode dos factores básicos

Os diagramas de Bode são construídos para funções de transferência $G(j\omega)$ e são dois:

diagramas de Bode de *módulo*

e

diagramas de Bode de *fase*.

Os diagramas de Bode de *módulo* são gráficos de

$$\begin{aligned}
 &|G(j\omega)| \text{ em dB } (|G(j\omega)|_{\text{dB}}) \\
 &\times \\
 &\omega \text{ (com escala logarítmica)}
 \end{aligned}$$

enquanto que os diagramas de Bode de *fase* são gráficos de

$$\begin{aligned}
 &\angle G(j\omega) \text{ em graus} \\
 &\times \\
 &\omega \text{ (com escala logarítmica)}
 \end{aligned}$$

Sabendo-se os diagramas de Bode dos factores básicos é possível utiliza-los na construção dos diagramas de Bode de qualquer outra função de transferência $G(j\omega)$ que desmembramos em termos dos factores básicos.

Uma vez familiarizados com os gráficos dos diagramas de Bode dos factores básicos que apresentamos aqui nesta secção, a construção dos diagramas de Bode das demais funções de transferência fica facilitada, como veremos nos exemplos da próxima secção.

Portanto, agora vamos mostrar os diagramas de Bode (*módulo* e *fase*) para cada um dos factores básicos vistos na secção anterior.

● O ganho de Bode (K_B)

Como $G(j\omega) = K_B$ é uma constante (não varia com ω), temos que $|K_B|$ em dB é dado por:

$$|K_B|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |K_B|$$

enquanto que $\angle K_B$ é 0 ou -180° , $\forall \omega$, isto é:

$$\angle K_B = 0^\circ \text{ se } K_B \text{ é uma constante positiva,}$$

ou

$$\angle K_B = -180^\circ \text{ se } K_B \text{ é uma constante negativa.}$$

Logo, como já dito acima na definição de diagramas de Bode da *fase*, o normal é representar a *fase* de K_B (i.e., o ângulo $\angle K_B$) em *graus* (em vez de radianos).

$$G(j\omega) = \angle K_B = \begin{cases} 0^\circ, & \text{se } K_B > 0 \\ -180^\circ, & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

É claro que o ângulo de *fase* para K_B negativo, -180° é o mesmo que $+180^\circ$ que é na verdade é π . No entanto, para efeito de diagrama de Bode tem-se a tendência de adoptar $\angle K_B = -180^\circ$ nestas situações.

Isso se deve ao facto de que, como $G(j\omega)$ tem um número de pólos superior (ou no máximo igual) ao número de zeros, então o $\angle G(j\omega)$ irá sempre tender para a parte *negativa* (para a parte de baixo, *abaixo* de 0°).

O diagrama de Bode (*módulo* e *fase*) de $G(j\omega) = \angle K_B$ está esboçado na figura 9.5.

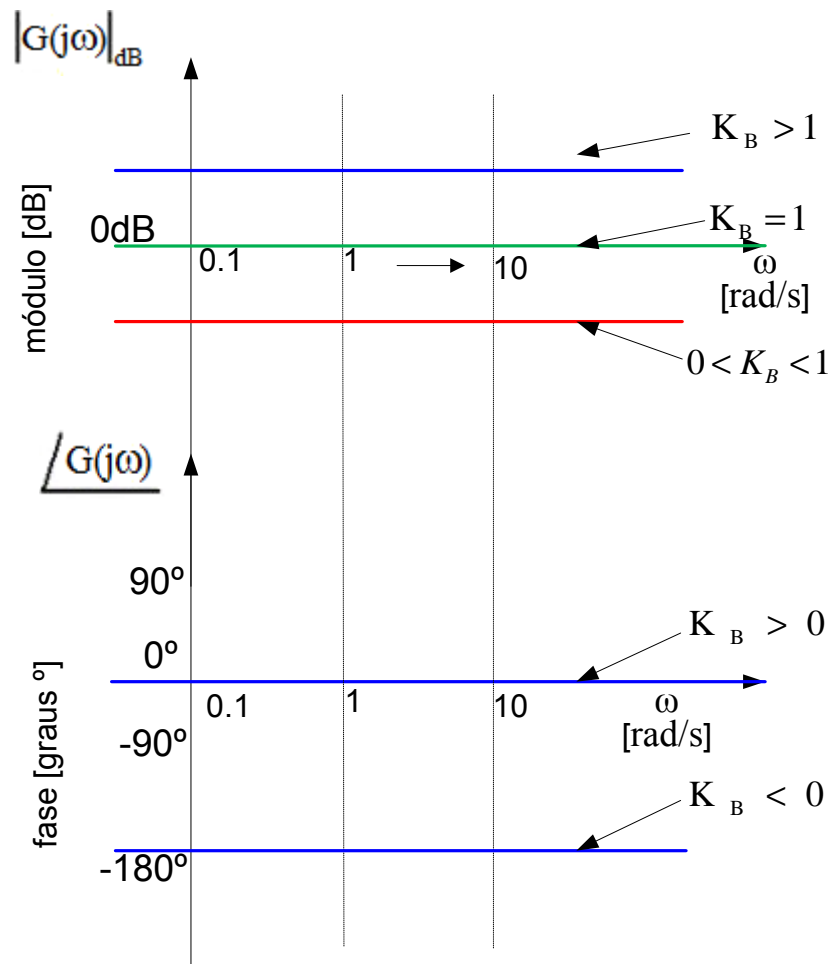


Fig. 9.5 – Diagrama de Bode (*módulo e fase*). O ganho de Bode $G(j\omega) = K_B$.

Note que no diagrama de Bode de *módulo* acima foi levado em consideração que:

Se $K_B > 1$, então

$$|G(j\omega)|_{dB} > 0$$

Se $K_B = 1$, então

$$|G(j\omega)|_{dB} = 0$$

Se $0 < K_B < 1$, então

$$|G(j\omega)|_{dB} < 0$$

O efeito que uma variação do ganho K_B em um diagramas de Bode com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *módulo para cima* (se $K_B > 0$) ou *para baixo* (se $K_B < 0$) e *não* afecta a curva do *ângulo de fase*.

Isto é, aumentando-se o valor de K_B fazemos todo o diagrama de Bode de *módulo* “*subir*” enquanto que diminuindo-se o valor de K_B fazemos todo o diagrama de Bode de *módulo* “*descer*”.

Por outro lado o diagrama de Bode de *fase* fica inalterado às variações de K_B se $K_B > 0$, ou fica deslocado para baixo de 180° , no caso de $K_B < 0$.

● Factor Integral $(j\omega)^{-1}$

Para $G(j\omega) = (j\omega)^{-1}$, temos que $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| \\ &= -20 \log_{10} \omega \quad [\text{dB}] \end{aligned}$$

que é na verdade a equação de uma recta com declive -20 dB/década pois ω está representado na escala logarítmica.

Para se ver isto, primeiramente note que

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \text{ intercepta } 0 \text{ dB em } \omega = 1, \quad \text{eq. (9.5)}$$

um detalhe que facilita para fazermos o seu esboço.

Na verdade temos que, olhando-se para algumas décadas consecutivas, temos que, no diagrama de Bode de *módulo* de $G(j\omega)$ ($|G(j\omega)|_{\text{dB}}$):

	\vdots	\Rightarrow	\vdots
para	$\omega = 0,01$	\Rightarrow	$G(j\omega) = 40 \text{ dB}$
para	$\omega = 0,1$	\Rightarrow	$G(j\omega) = 20 \text{ dB}$
para	$\omega = 1$	\Rightarrow	$G(j\omega) = 0 \text{ dB}$
para	$\omega = 10$	\Rightarrow	$G(j\omega) = -20 \text{ dB}$
para	$\omega = 10^2$	\Rightarrow	$G(j\omega) = -40 \text{ dB}$
	\vdots	\Rightarrow	\vdots

o que permite se ver claramente que trata-se de uma recta com declive -20 dB/década (como pode ser visto na figura 9.6).

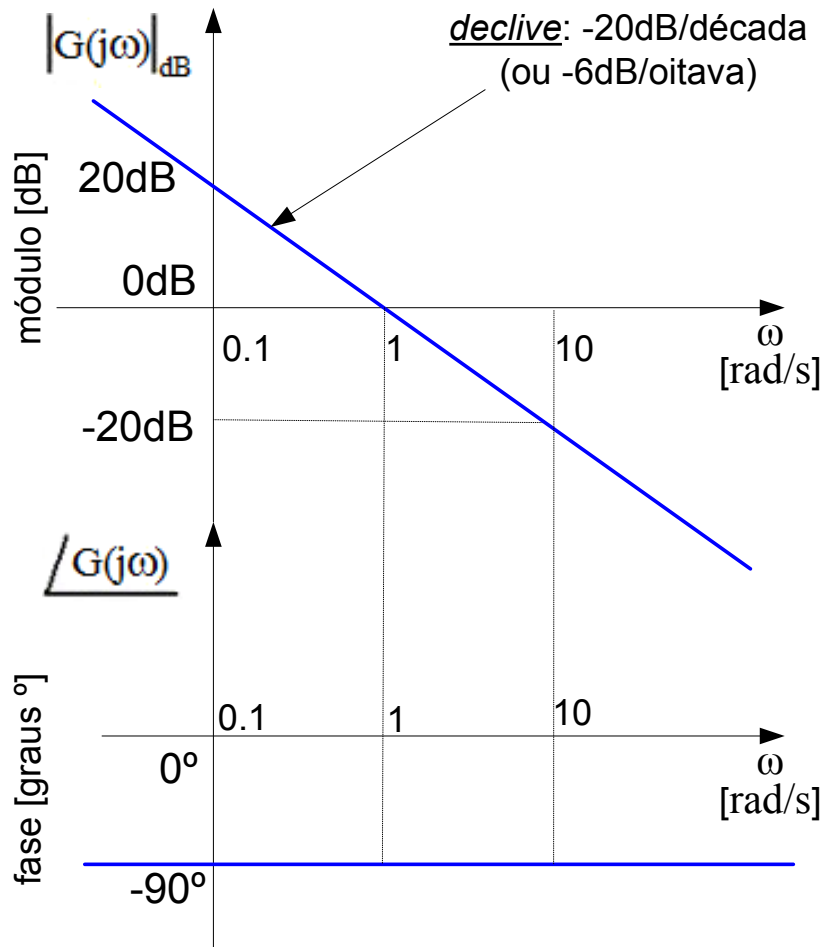


Fig. 9.6 – Diagrama de Bode (*módulo e fase*). Factor integral $G(j\omega) = 1/j\omega$.

Também é costume se olhar para algumas oitavas consecutivas (em vez de décadas) do diagrama de Bode de *módulo* de $G(j\omega)$ ($|G(j\omega)|_{dB}$). Isto é: uma oitava corresponde à: o dobro /ou a metade, dependendo do sentido (para direita ou para esquerda / aumentando-se / ou diminuindo-se).

	⋮	⇒	⋮
para	$\omega = 0,5$	⇒	$G(j\omega) = 6 \text{ dB}$
para	$\omega = 1$	⇒	$G(j\omega) = 0 \text{ dB}$
para	$\omega = 2$	⇒	$G(j\omega) = -6 \text{ dB}$
para	$\omega = 4$	⇒	$G(j\omega) = -12 \text{ dB}$
	⋮	⇒	⋮

que é uma forma alternativa de olhar para esta recta pois o declive de -20 dB/década é equivalente a -6 dB/oitava .

Uma oitava corresponde à: o *dobro* /ou a *metade*, dependendo do sentido (para direita ou para esquerda; aumentando-se / ou diminuindo-se).

Assim como o termo “*harmónico*”, que aparecia nas séries de Fourier (capítulo 5), vem da música, também este termo “*oitava*” vem da música. Corresponde à *oitava* nota, ou seja, a mesma nota mas no harmónico seguinte / ou no anterior, pois as notas são apenas sete e depois se repetem, com o dobro / ou com a metade da frequência. É como o oitavo dia, que é o mesmo dia da semana, mas na semana seguinte / ou na anterior.

Por outro lado, para a *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= \angle (1/j\omega) = \\ &= -\angle j\omega = \\ &= -90^\circ, \quad \forall \omega.\end{aligned}$$

Observe que, como ω está representado numa escala logarítmica, então ω é sempre positivo ($\omega > 0$) e portanto $\angle j\omega = 90^\circ$, e logo $-\angle j\omega = -90^\circ$.

Portanto, o diagrama de Bode de *fase* $\angle G(j\omega)$, $\forall \omega$, é uma constante igual a -90° :

Este diagrama de Bode (*módulo* e *fase*) de $G(j\omega) = 1/j\omega$ está esboçado na figura 9.6.

O efeito do factor básico $G(j\omega) = 1/j\omega$ em um diagrama de Bode de *fase* com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *fase para baixo* de 90° .

● Outros factores integrativos $(j\omega)^{-2}$, $(j\omega)^{-3}$, ..., $(j\omega)^{-n}$

Para $G(j\omega) = (j\omega)^{-n}$, temos uma situação bastante semelhante aos factores $(j\omega)^{-1}$ que vimos acima. O *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned}G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| \\ &= 20 \cdot n \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| \\ &= -20 \cdot n \cdot \log_{10} \omega \quad [\text{dB}]\end{aligned}$$

que é na verdade a equação de uma recta com declive $-20n$ dB/década pois ω está representado na escala logarítmica (como pode ser visto na figura 9.7).

Equivalentemente esta recta tem o declive de $-6n$ dB/oitava.

Note também que, assim como antes [na eq. (9.5)],

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \text{ intercepta } 0 \text{ dB em } \omega = 1, \quad \text{eq. (9.6)}$$

um detalhe que facilita para fazermos o esboço do diagrama de Bode.

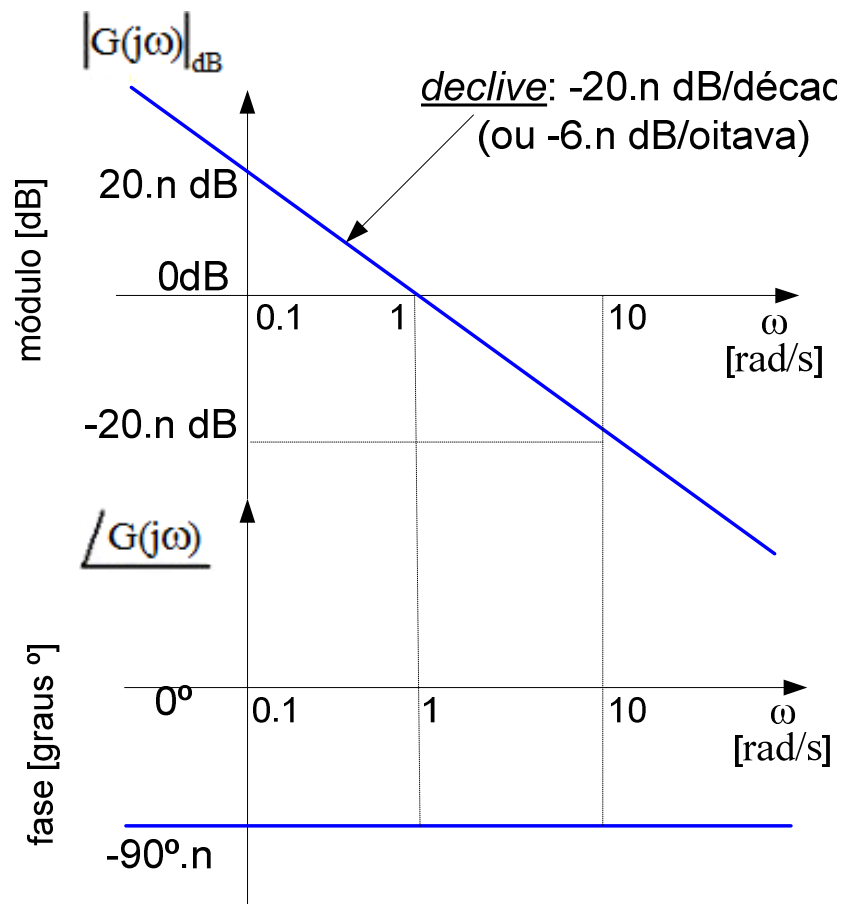


Fig. 9.7 – Diagrama de Bode (*módulo e fase*). Factores integrativos $G(j\omega) = (1/j\omega)^n$.

Por outro lado, para a *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle (1/j\omega)^n = \\ &= -n (\angle j\omega) = \\ &= -90^\circ \times n, \quad \forall \omega. \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama de Bode de *fase* $\angle G(j\omega)$, $\forall \omega$, é uma constante igual a

$$-90^\circ \times n:$$

Este diagrama de Bode (*módulo* e *fase*) de $G(j\omega) = (1/j\omega)^n$ está esboçado na figura 9.7.

O efeito do factor básico $G(j\omega) = (1/j\omega)^n$ em um diagrama de Bode de *fase* com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *fase para baixo* de $90^\circ \times n$.

● Factores derivativos $j\omega$, $(j\omega)^2$, $(j\omega)^3$, ..., $(j\omega)^n$

Para $G(j\omega) = (j\omega)^n$, temos uma situação um pouco semelhante aos factores $(j\omega)^{-n}$ que vimos acima. O *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \cdot \log_{10} |(j\omega)^n| \\ &= 20 \cdot n \cdot \log_{10} |j\omega| \\ &= 20 \cdot n \cdot \log_{10} \omega \quad [\text{dB}] \end{aligned}$$

que é a equação de uma recta com declive $+20n$ dB/década pois ω está representado na escala logarítmica (como pode ser visto na figura 9.8).

Equivalentemente esta recta tem o declive de $+6n$ dB/oitava.

Note também que aqui novamente, assim como antes [na eq. (9.5) e (9.6)],

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} \text{ intercepta } 0 \text{ dB em } \omega = 1, \quad \text{eq. (9.7)}$$

que nos facilita para fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

Por outro lado, para a *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle (1/j\omega)^n = \\ &= -n (\angle j\omega) = \\ &= -90^\circ \times n, \quad \forall \omega. \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama de Bode de *fase* $\angle G(j\omega)$, $\forall \omega$, é uma constante igual a $+90^\circ \times n$:

Este diagrama de Bode (*módulo* e *fase*) de $G(j\omega) = (j\omega)^n$ está esboçado na figura 9.8.

O efeito do factor básico $G(j\omega) = (j\omega)^n$ em um diagrama de Bode de *fase* com vários factores básicos é que ele faz deslocar a curva de *fase para cima* de $90^\circ \times n$.

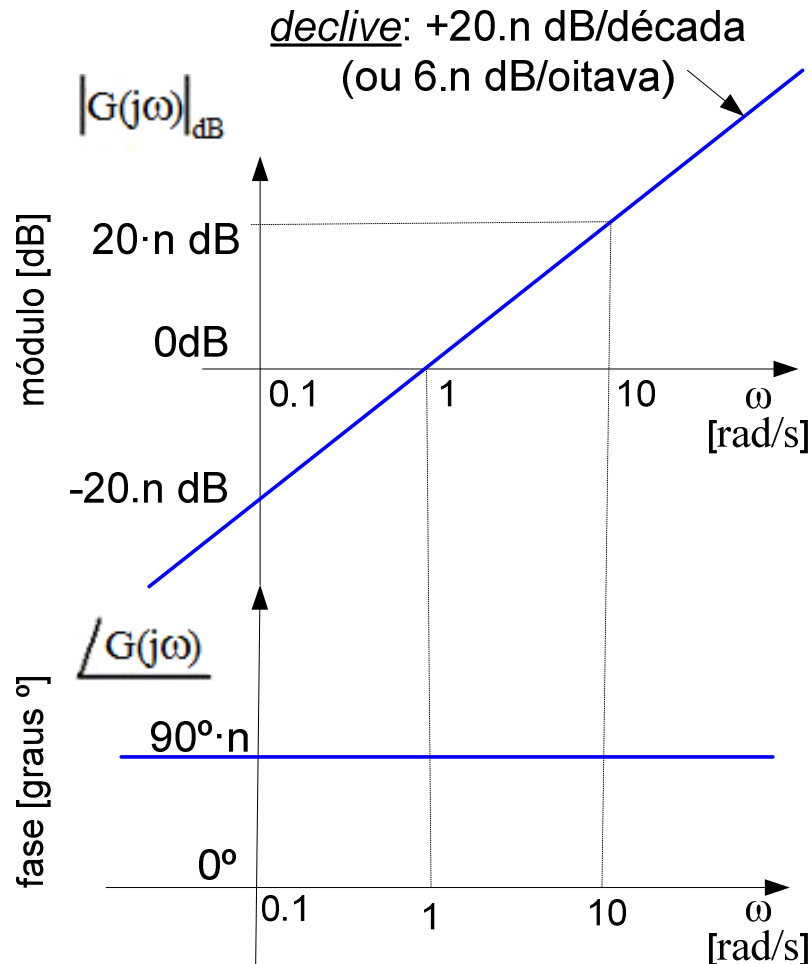


Fig. 9.8 – Diagrama de Bode (*módulo* e *fase*). Factores derivativos $G(j\omega) = (j\omega)^n$.

● Factor pólo primeira ordem $(1 + j\omega T)^{-1}$

Para $G(j\omega) = 1 / (1 + j\omega T)$, temos que o *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned} G(j\omega)_{dB} &= 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{(1 + j\omega T)} \right| \\ &= -20 \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2} \end{aligned}$$

que vamos dividir em 2 intervalos: $\omega \ll 1/T$ e $\omega \gg 1/T$, ou seja, para *frequências baixas e altas*.

No intervalo, $\omega \ll 1/T$ (*frequências baixas*), observamos que:

$$\omega T \ll 1 \Rightarrow 1 + (\omega T)^2 \cong 1 \Rightarrow G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \cdot \sqrt{1 + (\omega T)^2} \cong -20 \log_{10} \cdot (1) = 0 \text{ dB}$$

enquanto que no intervalo, $\omega \gg 1/T$ (*frequências altas*), observamos que:

$$\omega T \gg 1 \Rightarrow 1 + (\omega T)^2 \cong (\omega T)^2 \Rightarrow G(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \cdot \sqrt{1 + (\omega T)^2} \cong -20 \log_{10} (\omega T)$$

e portanto:

$$G(j\omega)|_{\text{dB}} = \begin{cases} 0, & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20 \log_{10} (\omega T), & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

Logo, temos 2 aproximações para a curva $G(j\omega)|_{\text{dB}} = 1 / (1 + j\omega T)|_{\text{dB}}$, ambas rectas, às quais chamamos de

“rectas assíptotas”

para *frequências altas e baixas*, que podem ser vistas na figura 9.9.

A expressão de $G(j\omega)|_{\text{dB}}$ para $\omega \gg 1/T$ (*frequências altas*) é de facto uma recta com declive de -20 dB/década, (ou -6 dB/oitava), pois ω está representado na escala logarítmica.

Note que:

$$\begin{aligned} & \text{a recta assíptota para frequências altas} \\ & \text{intercepta } 0 \text{ dB em } \omega = \omega_c = 1/T, \end{aligned} \tag{9.8}$$

em vez de em $\omega = 1$, como era o caso das rectas das eq. (9.5), eq. (9.6) e eq. (9.7).

Este é um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

Na verdade, este ponto:

$$0 \text{ dB para } \omega = 1/T$$

é onde as duas *rectas assíptotas* se interceptam (como pode ser visto na figura 9.9).

Por esta razão a frequência $\omega_c = \frac{1}{T}$ é chamada de *frequência de “canto”* (“corner frequency”), às vezes também chamada de *frequência de “corte”* (em processamento de sinais quando envolvem filtros).

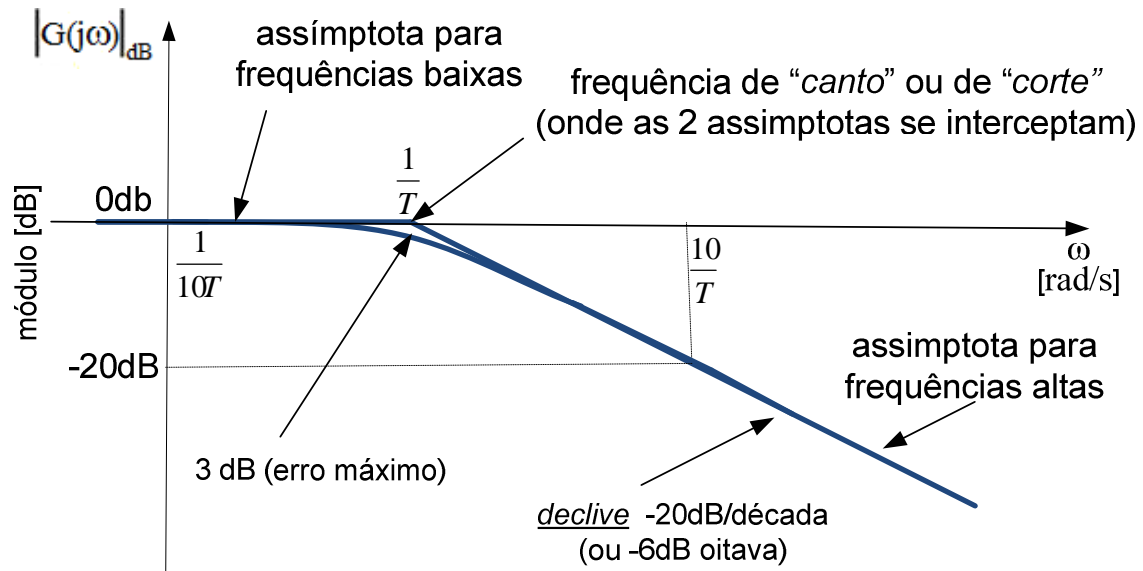


Fig. 9.9 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factor pólo primeira ordem
 $G(j\omega) = 1 / (1 + j\omega T)$.

A curva real de $G(j\omega)|_{dB}$ só coincide com as *assíntotas* quando $\omega \ll \omega_c$ ou quando $\omega \gg \omega_c$, que na prática corresponde a

$$\omega < \frac{1}{10 \cdot T} \quad (\text{para frequências baixas}) \quad \text{e} \quad \omega < \frac{10}{T} \quad (\text{para frequências altas})$$

Ou seja, as assíntotas são válidas para uma **década antes** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assíntota para frequências baixas*) ou uma **década depois** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assíntota para frequências altas*).

Na verdade mostra-se facilmente que tanto para $\omega = 1/10T$ (uma década abaixo de ω_c), como também para $\omega = 10T$ (uma década acima de ω_c), a curva de *módulo* $G(j\omega)|_{dB}$ apresenta erro desprezível, praticamente nulo:

$$G(j\omega)|_{dB} = -0,04 \text{ db} \cong 0 \text{ db} \quad \text{para } \omega = 1/(10T) \quad \text{ou} \quad \text{para } \omega \text{ aanto}$$

O erro máximo é de **3 dB** e ocorre exactamente na frequência de canto $\omega_c = 1/T$, o ponto onde as duas *assíntotas* se encontram, pois para este valor de ω ,

$$G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(1+j)} \right| = -20 \log_{10} \sqrt{\frac{1}{2}} = - \quad , \quad \text{para } \omega = \omega_c = \frac{1}{T}$$

(como pode ser visto na figura 9.9).

Para o ângulo de fase $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle 1/(1 + j\omega T) = \\ &= - \angle (1 + j\omega T) \\ &= - \arctg(\omega T) \end{aligned} \quad \text{eq. (9.9)}$$

Aqui também pode-se pensar nos intervalos: $\omega \ll 1/T$ e $\omega \gg 1/T$, ou seja, para *frequências baixas e altas*.

Nas *frequências baixas*, $\omega \ll 1/T$, observamos que:

$$\omega T \ll 1 \Rightarrow 1+(j\omega T) \cong 1 \Rightarrow \angle G(j\omega) = \angle 1 \cong 0^\circ$$

enquanto que nas *frequências altas*, $\omega \gg 1/T$, observamos que:

$$\omega \cdot T \gg 1 \Rightarrow 1+j \cdot (\omega T) \cong j \cdot (\omega T) \Rightarrow \angle G(j\omega) = - \angle j \cdot (\omega T) \cong -90^\circ$$

resultados que também poderiam ser facilmente obtidos usando a eq. (9.9) com $\omega T \cong 0$ e $\omega T \cong \infty$, respectivamente, pois

$$\arctg(0) = 0^\circ \quad \text{e} \quad - \arctg(\infty) = -90^\circ.$$

e portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -\arctg(\omega T), & \frac{T}{100} < \omega < 100T \\ -90^\circ, & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

Note que para $\omega_c = 1/T$, $G(j\omega_c) = - \arctg(\omega_c T) = - \arctg(1) = -45^\circ$, logo, na frequência de “*canto*” ou de “*corte*” $\omega_c = 1/T$ temos:

a curva do $\angle G(j\omega)$ passa por -45° em $\omega = 1/T$, eq. (9.10)

isto é, na metade do intervalo entre 0° e -90° ; um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *fase*.

Ou seja diagrama de Bode de *fase* $\angle G(j\omega)$ tende assintoticamente para 0° (à esquerda) e para -90° (à direita).

Na prática consideramos que $\angle G(j\omega)$ varia de 0° a -90° enquanto a frequência ω varia

$$\text{de } \frac{\omega_c}{10} \text{ até } 10\omega_c.$$

isto é, desde uma *década antes* da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assíntota para frequências baixas*) até uma *década depois* da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assíntota para frequências altas*).

O diagrama de Bode de *fase* de $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-1}$ está esboçado na figura 9.10.

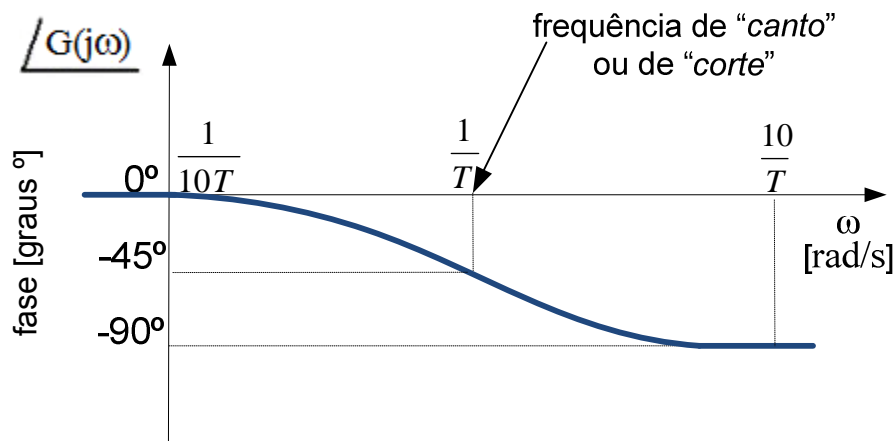


Fig. 9.10 – Diagrama de Bode de *fase*. Factor pólo primeira ordem $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$.

● Factores pólos múltiplos $(1 + j\omega T)^{-2}$, $(1 + j\omega T)^{-3}$, ..., $(1 + j\omega T)^{-n}$

Para $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)^n$, temos que o *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{(1+j\omega T)^n} \right| \\
 &= -20 \cdot n \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{1+(\omega \cdot T)^2} \quad [\text{dB}]
 \end{aligned}$$

e dividindo em 2 intervalos: $\omega \ll 1/T$ e $\omega \gg 1/T$, ou seja, para *frequências baixas* e *altas*, observamos que:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \begin{cases} 0, & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -20n \cdot \log_{10}(\omega T), & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

que pode ser vista na figura 9.11.

Portanto, temos novamente 2 aproximações para a curva $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 1/(1+j\omega T)^n$, por duas “*rectas assíptotas*” em *frequências baixas* e *altas* (esta última com declive de -20 dB/década ou -6 dB/oitava).

Note que, aqui também tem-se a frequência de “*canto*” ou de “*corte*” (“*corner frequency*”), $\omega_c = 1/T$, e assim como na secção anterior, eq. (9.8), aqui também:

$$\begin{aligned}
 &\text{a recta assíptota para frequências altas} \\
 &\text{intercepta } 0 \text{ dB em } \omega = \omega_c = 1/T, \qquad \qquad \qquad \text{eq. (9.11)}
 \end{aligned}$$

um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

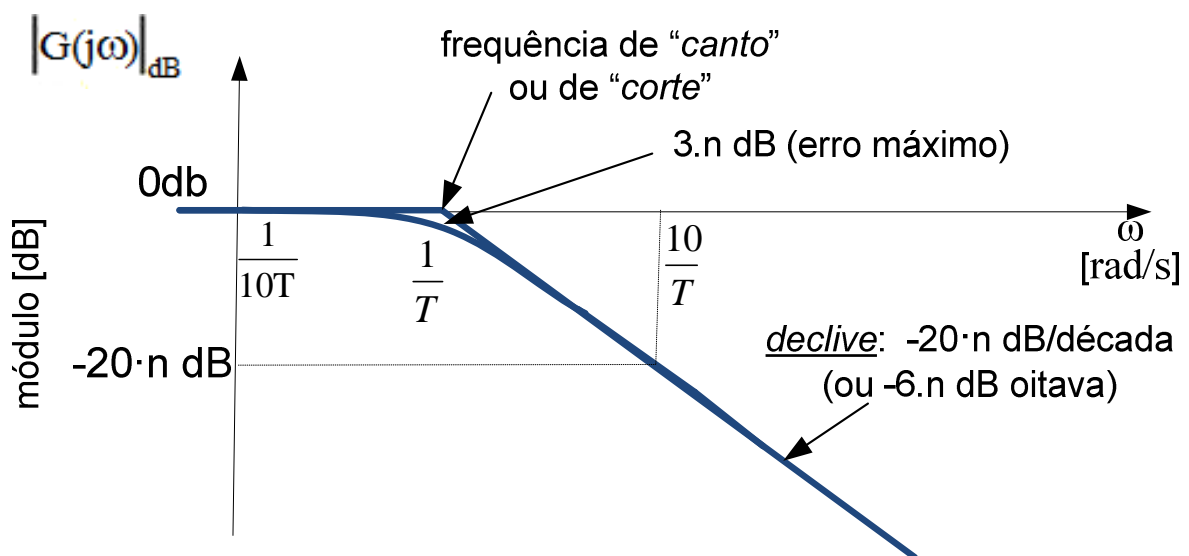


Fig. 9.11 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores pólos múltiplos

$$G(j\omega) = 1/(1+j\omega T)^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Novamente, a curva real de $G(j\omega)|_{dB}$ só coincide com as *assíntotas* quando $\omega \ll \omega_c$ ou quando $\omega \gg \omega_c$, que na prática corresponde a

$$\omega < \frac{1}{10 \cdot T} \text{ (para frequências baixas)} \quad \text{e} \quad \omega < \frac{10}{T} \text{ (para frequências altas)}$$

Ou seja, as assíntotas são válidas para uma **década antes** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assíntota* para *frequências baixas*) ou uma **década depois** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assíntota* para *frequências altas*).

Nas proximidades da frequência de *canto* ω_c as *assíntotas* apenas aproximam da curva real de $G(j\omega)|_{dB}$.

O erro máximo agora é de **3×n dB** e ocorre exactamente na frequência de canto $\omega_c = 1/T$, o ponto onde as duas *assíntotas* se encontram, pois para este valor de ω ,

$$G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(1+j)^n} \right| = -20 \cdot n \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = -3 \cdot n \text{ dB}, \quad \text{para } \omega = \omega_c = \frac{1}{T}$$

(como pode ser visto na figura 9.11).

Para o ângulo de *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle 1 / (1 + j\omega T)^n = \\ &= - \angle (1 + j\omega T)^n \\ &= - n \times \arctg(\omega T) \end{aligned} \quad \text{eq. (9.12)}$$

Nas *frequências baixas*, $\omega \ll 1/T$, observamos que:

$$\angle G(j\omega) \cong 0^\circ$$

enquanto que nas *frequências altas*, $\omega \gg 1/T$, observamos que:

$$\angle G(j\omega) \cong -90^\circ \times n$$

resultados que também poderiam ser facilmente obtidos usando a eq. (9.12) com $\omega T \cong 0$ e $\omega T \cong \infty$, respectivamente, pois

$$\arctg(0) = 0^\circ \quad \text{e} \quad - \arctg(\infty) \times n = -90^\circ \times n,$$

e portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \ll \frac{1}{T} \\ -n \times \arctg(\omega T), & \frac{T}{100} < \omega < 100T \\ -90^\circ \times n, & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

Note que para $\omega_c = 1/T$, $G(j\omega_c) = -\arctg(\omega_c T) = -\arctg(1) = -45^\circ \times n$, logo, na frequência de “*canto*” ou de “*corte*” $\omega_c = 1/T$ temos:

a curva do $\angle G(j\omega)$ passa por $-45^\circ \times n$ em $\omega = \omega_c = 1/T$, eq. (9.13)

isto é, na metade do intervalo entre 0° e $-90^\circ \times n$; um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *fase*.

Ou seja, o diagrama de Bode de *fase* $\angle G(j\omega)$ tende assintoticamente para 0° (à esquerda) e para $-90^\circ \times n$ (à direita).

Na prática consideramos que $\angle G(j\omega)$ varia de 0° a $-90^\circ \times n$ enquanto a frequência ω varia

$$\text{de } \frac{\omega_c}{10} \text{ até } 10\omega_c.$$

isto é, desde uma *década antes* da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assíntota para frequências baixas*) até uma *década depois* da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assíntota para frequências altas*).

O diagrama de Bode de *fase* de $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-n}$ está esboçado na figura 9.12.

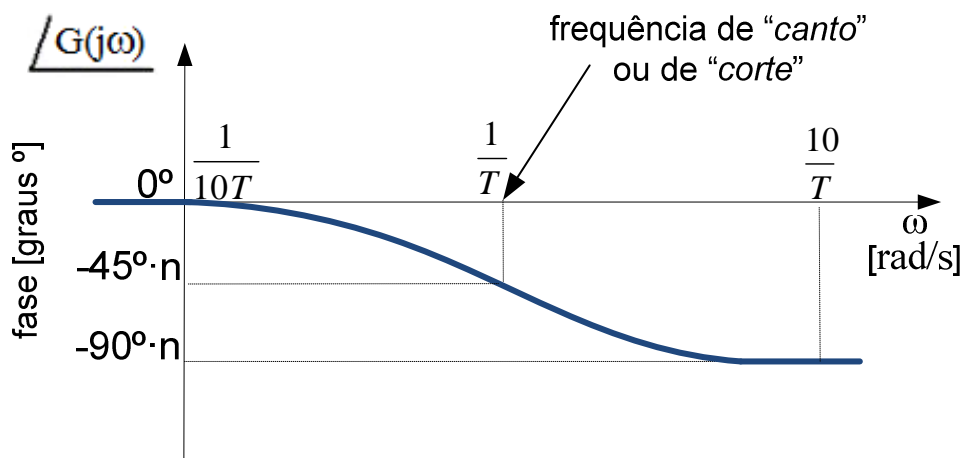


Fig. 9.12 – Diagrama de Bode de *fase*. Factores pólos múltiplos

$$G(j\omega) = 1 / (1 + j\omega T)^n, n = 2, 3, \dots$$

● Factores zeros simples e múltiplos $(1 + j\omega T)^1, (1 + j\omega T)^2, \dots, (1 + j\omega T)^n$

Para $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n, n = 1, 2, \dots, n$ a situação é análoga aos casos de pólos simples e múltiplos nas duas secções anteriores. Temos que o *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned} G(j\omega)|_{dB} &= 20 \cdot \log_{10} |(1 + j\omega T)^n| \\ &= 20 \cdot n \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{1 + (\omega \cdot T)^2} \end{aligned}$$

e dividindo em 2 intervalos: $\omega \ll 1/T$ e $\omega \gg 1/T$, ou seja, para *frequências baixas e altas*, observamos que:

$$G(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega \ll \frac{1}{T} \\ +20 \cdot n \cdot \log_{10} (\omega \cdot T), & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

que pode ser vista na figura 9.13.

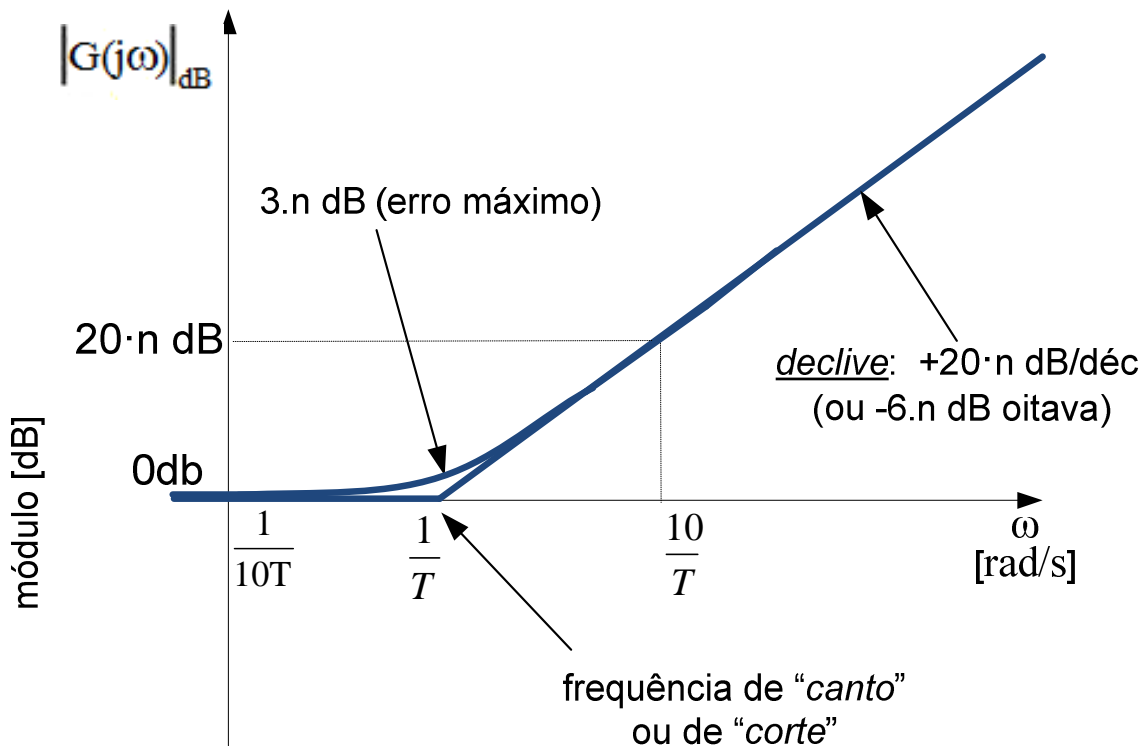


Fig. 9.13 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores zeros simples e múltiplos $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n, n = 1, 2, \dots$

Note que, aqui também tem-se a frequência de “*canto*” ou de “*corte*” (“*corner frequency*”), $\omega_c = 1/T$, e assim como nas secções anteriores, eq. (9.8) e eq. (9.11), aqui também:

$$\begin{aligned} & \text{a recta assímptota para frequências altas} \\ & \text{intercepta } 0 \text{ dB em } \omega = \omega_c = 1/T, \end{aligned} \quad \text{eq. (9.14)}$$

um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

Novamente, para a curva real de $G(j\omega)|_{\text{dB}}$, as assímptotas são válidas para uma **década antes** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assímptota para frequências baixas*) ou uma **década depois** da frequência de canto $\omega_c = 1/T$ (no caso da *assímptota para frequências altas*).

Nas proximidades da frequência de *canto* ω_c as *assímptotas* apenas aproximam da curva real de $G(j\omega)|_{\text{dB}}$ apresentando um erro máximo de **3×n dB** que ocorre exactamente na frequência de canto $\omega_c = 1/T$, o ponto onde as duas *assímptotas* se encontram.

Para o ângulo de *fase* $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle (1 + j\omega T)^n = \\ &= n \times \arctg(\omega T) \end{aligned}$$

e portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \ll \frac{1}{T} \\ n \times \arctg(\omega T), & \frac{T}{100} < \omega < 100T \\ 90^\circ \times n, & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

Note que para $\omega_c = 1/T$, a frequência de “*canto*” ou de “*corte*”, temos que:

$$\text{a curva do } \angle G(j\omega) \text{ passa por } 45^\circ \times n \text{ em } \omega = \omega_c = 1/T, \quad \text{eq. (9.15)}$$

isto é, na metade do intervalo entre 0° e $90^\circ \times n$; um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *fase*.

Na prática consideramos que $\angle G(j\omega)$ varia de 0° a $90^\circ \times n$ enquanto a frequência ω varia

$$\text{de } \frac{\omega_c}{10} \text{ até } 10 \omega_c.$$

isto é, desde uma *década antes* da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assíntota para frequências baixas*) até uma *década depois* da frequência de *canto* $\omega_c = 1/T$ (*assíntota para frequências altas*).

O diagrama de Bode de *fase* de $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{-n}$ está esboçado na figura 9.14.

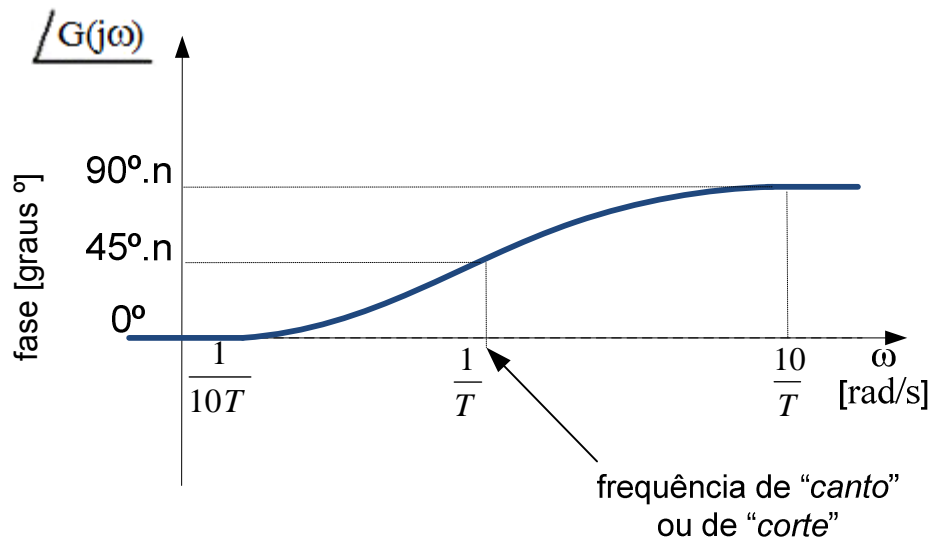


Fig. 9.14 – Diagrama de Bode de *fase*. Factores zeros simples e múltiplos $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n$, $n = 1, 2, \dots$

- Factores pólos quadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$, $0 \leq \zeta \leq 1$.

Note que a função de transferência $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \cdot \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{\left[1 + 2\zeta \cdot \frac{j\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}$$

tem um par de pólos que serão:

- a) pólos complexos se $0 \leq \zeta < 1$
- b) pólos duplos se $\zeta = 1$
- c) pólos reais e distintos se $\zeta > 1$

Os factores quadráticos que tratamos nesta secção fazem parte dos casos (a) e (b) acima, isto é $0 \leq \zeta \leq 1$, pois o caso (c), pólos reais e distintos ($\zeta > 1$), já estão cobertos nos factores básicos anteriores.

Na verdade, mesmo no caso (b), quando temos a situação limite de $\zeta = 1$, então

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left[1 + 2 \cdot \frac{j\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}$$

que corresponde a pólos duplos e iguais a $j\omega/\omega_n$, um caso que também já está abrangido nos factores básicos anteriores.

Portanto as técnicas que serão apresentadas nesta secção para $0 \leq \zeta \leq 1$ vão coincidir com outras já apresentadas anteriormente no caso particular de $\zeta = 1$.

Para $G(j\omega) = [1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}$, $n = 1, 2, \dots, n$ temos que o *módulo* $|G(j\omega)|$ em dB é dado por:

$$\begin{aligned} G(j\omega)|_{dB} &= -20 \log_{10} \left| \left[1 + 2\zeta \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^n \right| \\ &= -20 n \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right] + \left(2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \end{aligned}$$

e dividindo em 2 intervalos: $\omega \ll \omega_n$ e $\omega \gg \omega_n$, ou seja, para *frequências baixas* e *altas*, observamos que:

$$G(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & \omega \ll \omega_n \\ -20 n \cdot \log_{10} \cdot \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right] + \left(2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} & 0,1 \cdot \omega_n < \omega < 10 \cdot \omega_n \\ -40 n \cdot \log_{10}(\omega T), & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$

Note que, assim como nas secções anteriores tinha ω_c em eq. (9.8), eq. (9.11) e eq. (9.14), aqui também tem-se uma frequência ω_n que é chamada de

$$\omega_n = \text{frequência natural do sistema,}$$

que separa as frequências “*altas*” e “*baixas*” e

a *recta assíptota para frequências altas*

intercepta 0 dB em $\omega = \omega_n$,

eq. (9.16)

um detalhe a ter em atenção ao fazermos o esboço do diagrama de Bode de *módulo*.

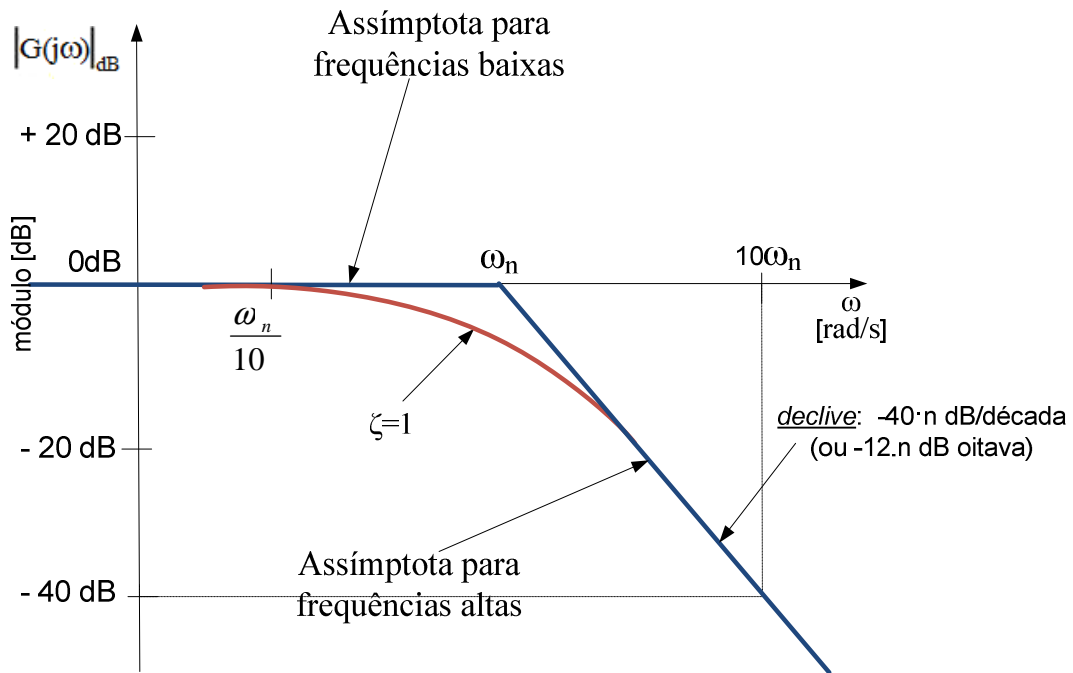


Fig. 9.15 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores pólos quadráticos

$$G(j\omega) = [1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}, \quad \zeta = 1, n = 1.$$

Nas proximidades da frequência natural ω_n as *assíntotas* apenas aproximam da curva real de $G(j\omega)|_{dB}$ apresentando um erro máximo de **$6 \times n$ dB** que ocorre exactamente na frequência de canto ω_n , o ponto onde as duas *assíntotas* se encontram.

A curva $G(j\omega)|_{dB}$ para o caso particular que falamos acima, $\zeta = 1$, está representado na figura 9.15.

A medida que o valor de ζ diminui, $\zeta < 1$ as curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ vão ficando mais altas e vão criando picos (a partir de $\zeta < \sqrt{2}/2 = 0,707$) que vão se tornando cada vez mais altos a medida que $\zeta \rightarrow 0$.

Estas curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ estão ilustradas na figura 9.16 para o caso geral de $0 \leq \zeta \leq 1$.

Estes picos ocorrem nas frequências ω_r chamadas

$$\omega_r = \text{frequência de ressonância}$$

que assume valores

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \text{para } 0 \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que para $\zeta = 0$, $\omega_r = \omega_n$. A medida que ζ aumenta a frequência de ressonância ω_r diminui ligeiramente até que, quando

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

então a frequência de ressonância $\omega_r = \omega_n/2$.

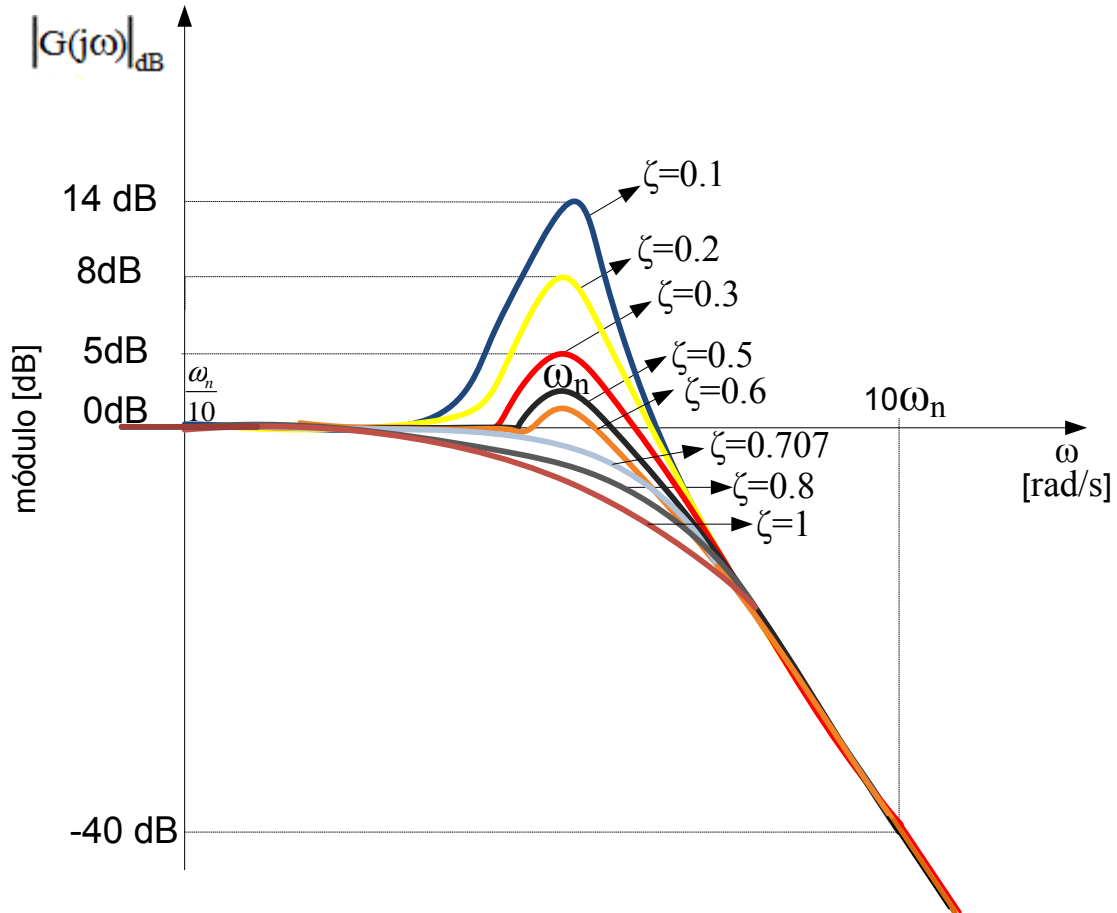


Fig. 9.16 – Diagrama de Bode de *módulo*. Factores pólos quadráticos $G(j\omega) = [1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$

Por outro lado, estes picos atingem valores M_r

$$M_r = \text{pico de ressonância}$$

que tem os valores

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \cdot \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \text{para } 0 \leq \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que para $0,707 \leq \zeta \leq 1$ não há pico de ressonância. Em particular, se $\zeta = 0,707$, então

$$M_r = 1 = 0 \text{ dB}$$

(também não há pico de ressonância).

A medida que ζ diminui, o pico de ressonância M_r aumenta. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{quando } \zeta = 0,5 &\Rightarrow M_r = 1,155 \cong 1,25\text{dB}, \\ \text{quando } \zeta = 0,25 &\Rightarrow M_r = 2,133 \cong 6,6\text{dB}, \\ \text{quando } \zeta = 0,1 &\Rightarrow M_r = 5,025 \cong 14\text{dB}, \\ \text{quando } \zeta = 0,05 &\Rightarrow M_r = 10,01 \cong 20\text{dB}. \end{aligned}$$

A figura 9.16 ilustra estes picos de ressonância.

Para o ângulo de fase $\angle G(j\omega)$, temos que:

$$\angle G(j\omega) = \angle \left[1 - 2\zeta \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{-n} = -n \cdot \text{arctg} \left[\frac{2\zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$$

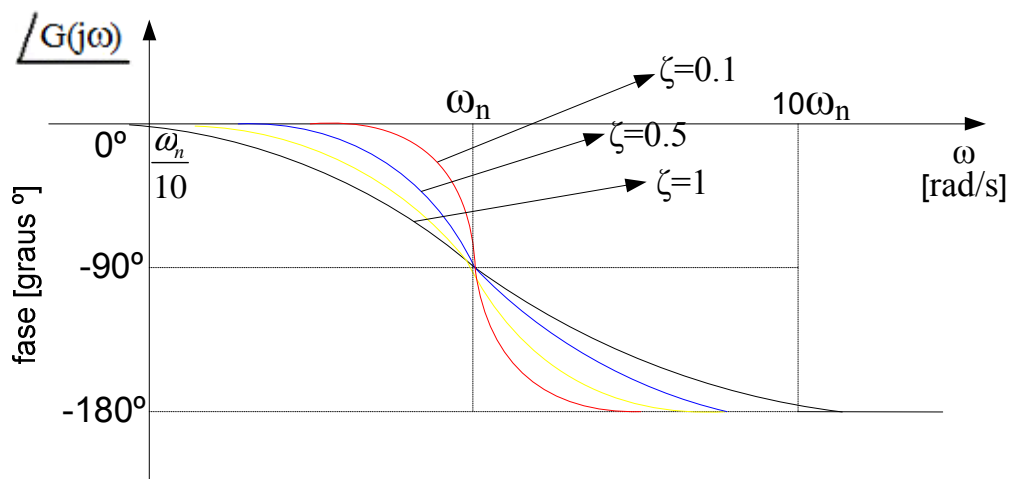


Fig. 9.17 – Diagrama de Bode de fase. Factores pólos quadráticos simples e múltiplos $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^n$, $n = 1, 2, \dots$

Portanto:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \rightarrow 0 \\ -90^\circ \cdot n, & \omega = \omega_n \\ -180^\circ \cdot n, & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

conforme esboçado a figura 9.17.

Na prática consideramos que $\angle G(j\omega)$ varia de 0° a $180^\circ \times n$ enquanto a frequência ω varia

$$\text{de } \frac{\omega_n}{10} \text{ até } 10\omega_n.$$

isto é, desde uma *década antes* da frequência de *natural* ω_n (*assíntota para frequências baixas*) até uma *década depois* da frequência de *natural* ω_n (*assíntota para frequências altas*).

O diagrama de Bode de *fase* de $G(j\omega)$ se torna mais íngreme (com declive mais acentuado) a medida que $\zeta \rightarrow 0$ e isto está ilustrado na figura 9.17.

- Factores zeros quadráticos $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^n$, $n = 1, 2, \dots$

Os factores zeros quadráticos que têm a função de transferência $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \cdot \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^n$$

são em tudo análogo aos factores pólos quadráticos que vimos acima. Ou seja, curva de *módulo* e *fase* para os factores zeros quadráticos podem ser obtidas invertendo-se o sinal das curvas de *módulo* e *fase* dos factores pólos quadráticos

As principais diferenças são que os picos de ressonância são para baixo em vez de para cima e as curvas de *fase* vão de 0° a 180° em vez de 0° a -180° .

9.8 – Factores básicos com sinais negativos

No caso de factores básicos com sinais negativos do tipo

$$G(s) = \frac{1}{(Ts-1)}, \quad G(s) = \frac{1}{(Ts-1)^2}, \quad G(s) = \frac{1}{(Ts-1)^3}, \quad \dots$$

ou

$$G(s) = (Ts-1), \quad G(s) = (Ts-1)^2, \quad G(s) = (Ts-1)^3, \quad \dots$$

é fácil mostrar que o diagrama de Bode de *módulo* é idêntico ao factor básico correspondente com sinal “+”, entretanto para a construção do diagrama de Bode de *fase* é necessário um cuidado maior na análise.

Nos próximos exemplos ilustramos como fazer nestas situações.

Exemplo 9.6:

$$G(j\omega) = \frac{(s+1)}{(s+100)} = \frac{1}{100} \frac{(s+1)}{\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1/100 = -40 \text{ dB}$ e $G(j\omega)$ tem mais dois factores básicos:

$$(s+1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s + 1\right)^{-1}$$

Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100)$$

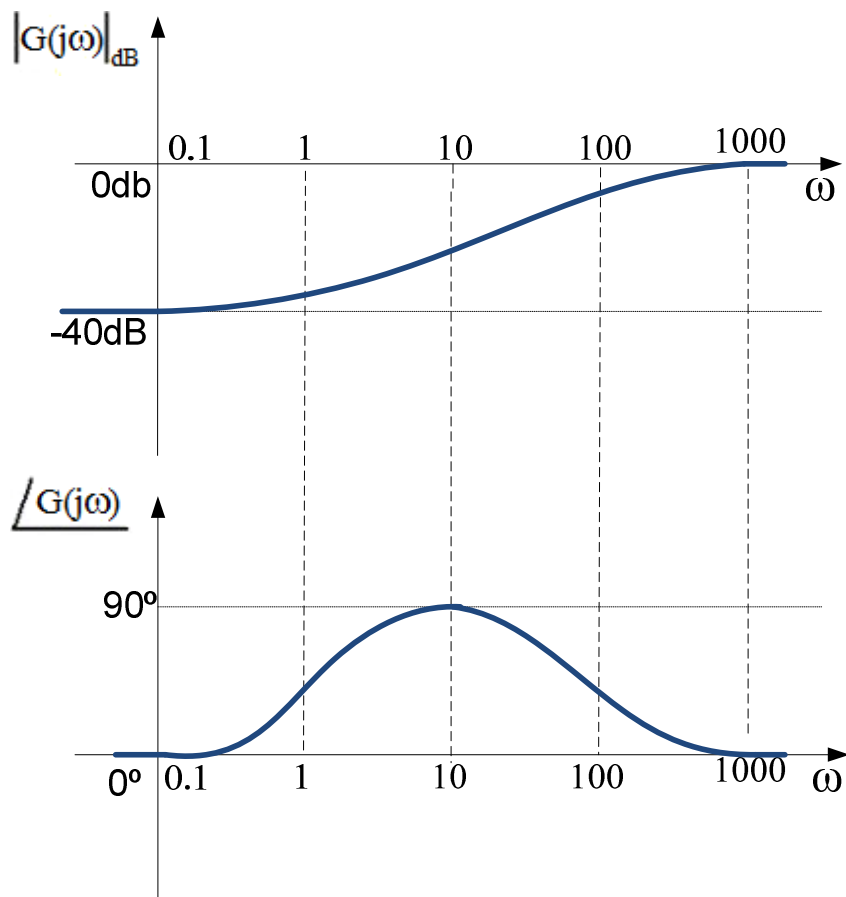


Fig. 9.18 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.6.

□

Exemplo 9.7:

$$G(j\omega) = \frac{(s-1)}{(s+100)} = \frac{1}{100} \frac{(s-1)}{\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1/100 = -40$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s-1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s + 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual ao do exemplo anterior (Exemplo 9.6). Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$\angle G(j\omega) = \angle(-1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100) = 180^\circ + \angle(1-j\omega) - \angle(1+j\omega/100)$$

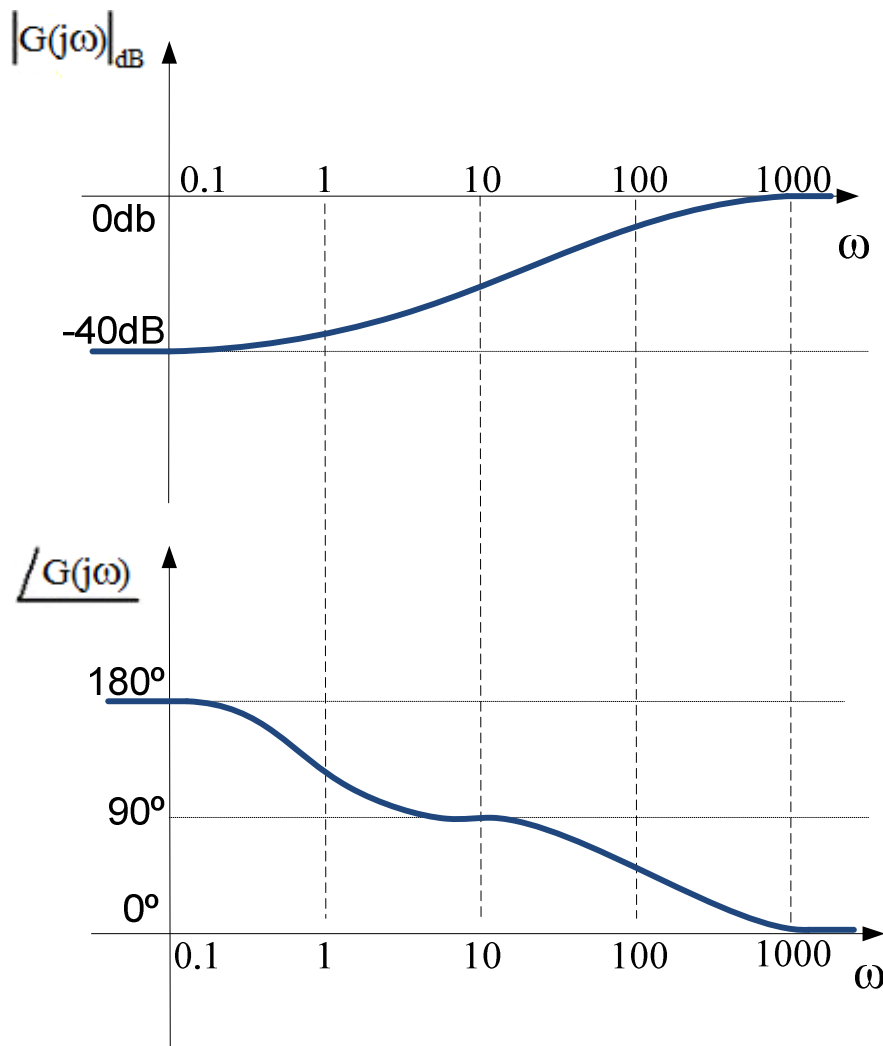


Fig. 9.19 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.7.

□

Exemplo 9.8:

$$G(j\omega) = \frac{(s+1)}{(s-100)} = \frac{1}{100} \frac{(s+1)}{\left(\frac{s}{100} - 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1/100 = -40$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s+1) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos 2 exemplos anteriores (Exemplos 9.6 e 9.7). Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(-1+j\omega/100) = \angle(1+j\omega) + 180^\circ - \angle(1-j\omega/100)$$

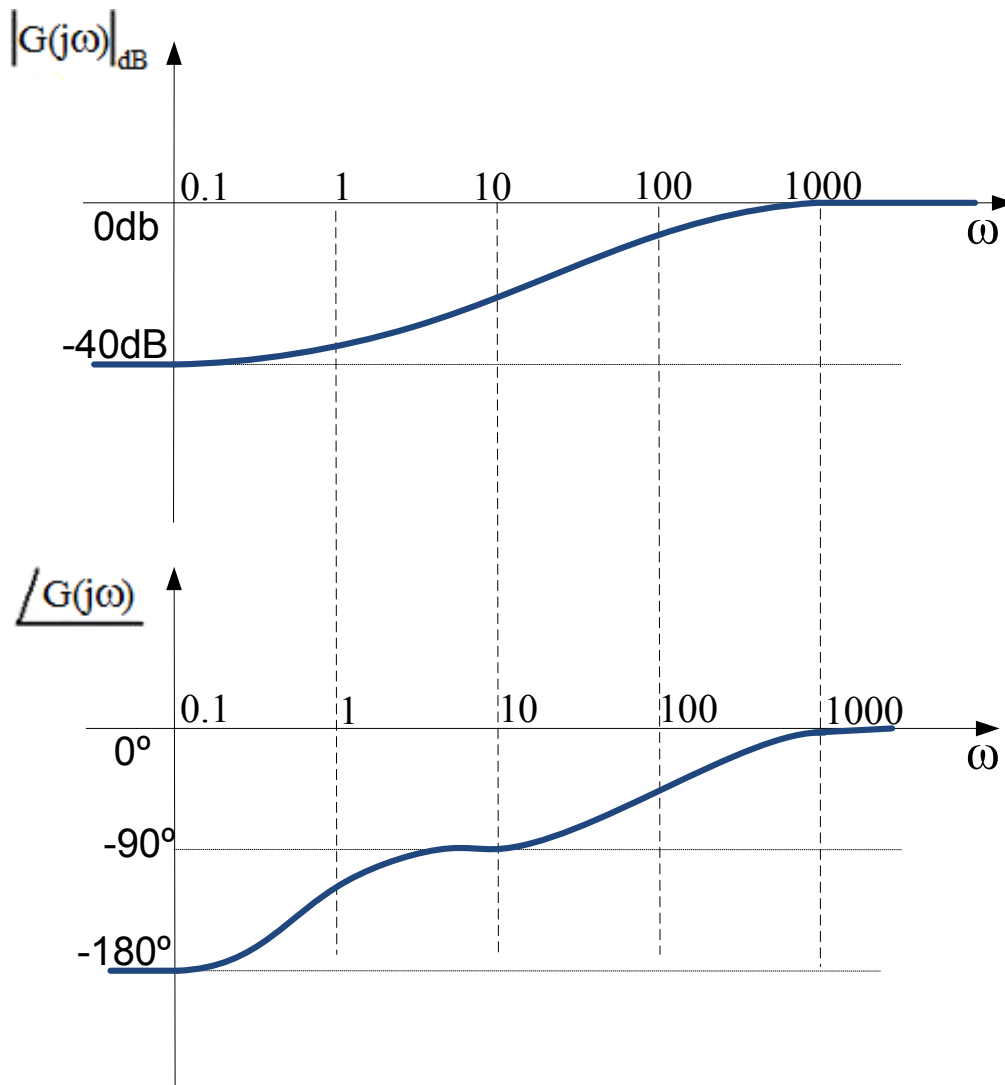


Fig. 9.20 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.8.

□

Exemplo 9.9:

$$G(j\omega) = \frac{(s-1)}{(s-100)} = \frac{1}{100} \frac{(s-1)}{\left(\frac{s}{100} - 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1/100 = -40$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais os 2 factores básicos:

$$(s-1) \quad e \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos 3 exemplos anteriores (Exemplos 9.6, 9.7 e 9.8). Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$G(j) \quad (1 - j) \quad (1 - j/100) \quad 180^\circ \quad (1 - j) \quad 180^\circ \quad (1 - j/100)$$

$$(1 - j) \quad (1 - j\omega/400) \quad 180^\circ \quad (1 - j\omega/400) \quad 180^\circ \quad (1 - j\omega/400)$$

Exemplo 9.10:

$$G(j\omega) = \frac{100}{(s+1)(s+100)} = \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1 = 0 \text{ dB}$ e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s+1)^{-1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s + 1\right)^{-1}$$

Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100)$$

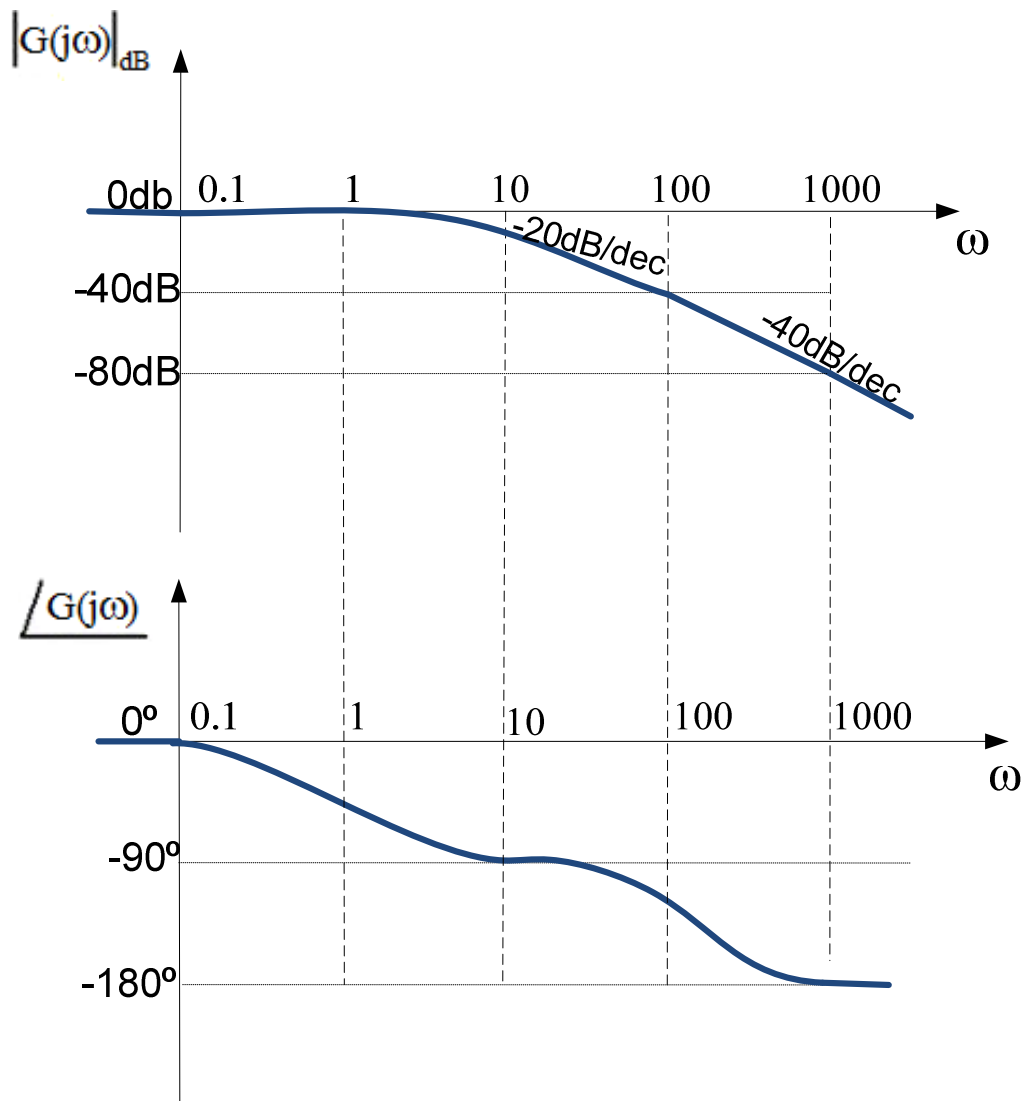


Fig. 9.22 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.10.

□

Exemplo 9.11:

$$G(j\omega) = \frac{100}{(s+1)(s-100)} = \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{100} - 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1 = 0$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s+1)^{-1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo*

Exemplo 9.12:

$$G(j\omega) = \frac{100}{(s-1)(s+100)} = \frac{1}{(s-1)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1 = 0$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s-1)^{-1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s + 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dois exemplos anteriores (Exemplos 9.10 e 9.11). Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$\angle G(j\omega) = -\angle(-1+j\omega) - \angle(1+j\omega/100) = 180^\circ - \angle(1-j\omega) - \angle(1+j\omega/100)$$

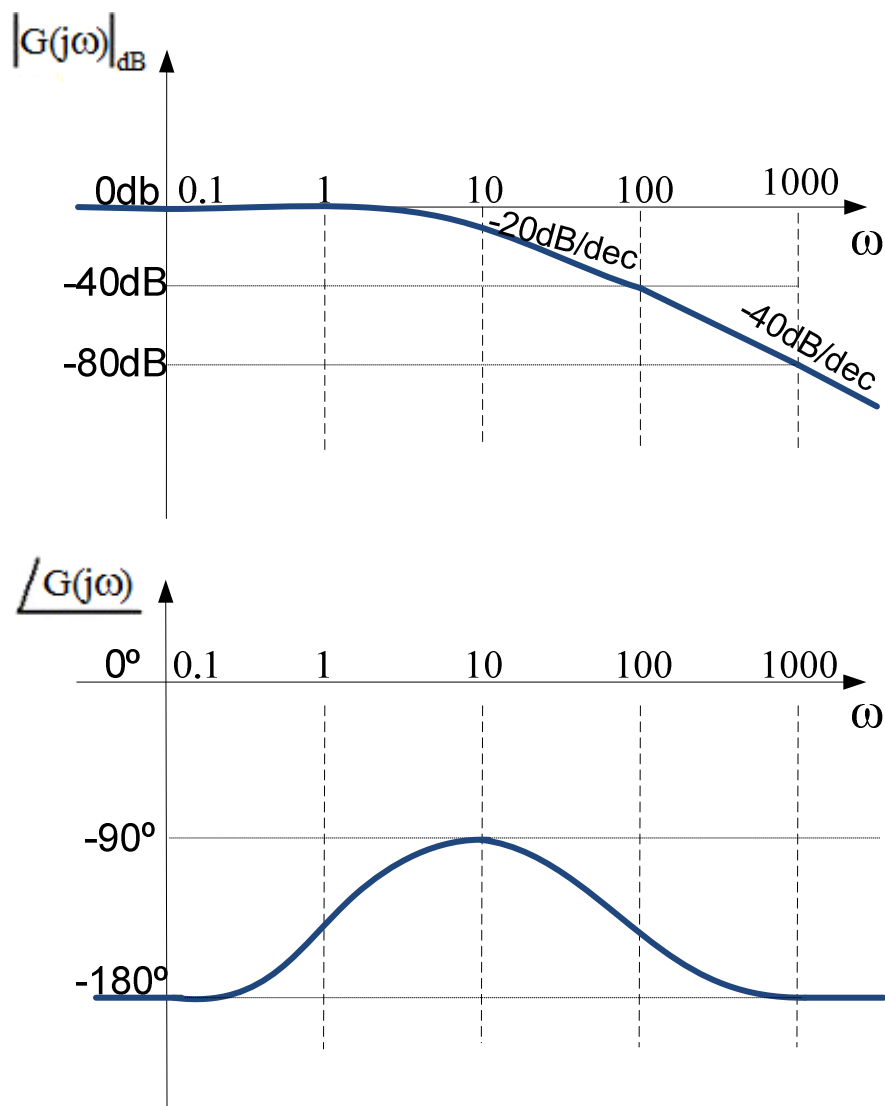


Fig. 9.24 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.12.

□

Exemplo 9.13:

$$G(j\omega) = \frac{100}{(s-1)(s-100)} = \frac{1}{(s-1)\left(\frac{s}{100} - 1\right)}$$

Note que neste caso $K_B = 1 = 0$ dB novamente e $G(j\omega)$ tem ainda mais dois factores básicos:

$$(s-1)^{-1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{100} \cdot s - 1\right)^{-1}$$

Logo, o diagrama de Bode de *módulo* é igual aos três exemplos anteriores (Exemplos 9.10, 9.11 e 9.12). Além disso, a *fase* de $G(j\omega)$ é dada por

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= -\angle(-1+j\omega) - \angle(-1+j\omega/100) = 180^\circ - \angle(1-j\omega) - 180^\circ - \angle(1-j\omega/100) \\ &= -\angle(1-j\omega) - \angle(1-j\omega/100) \end{aligned}$$

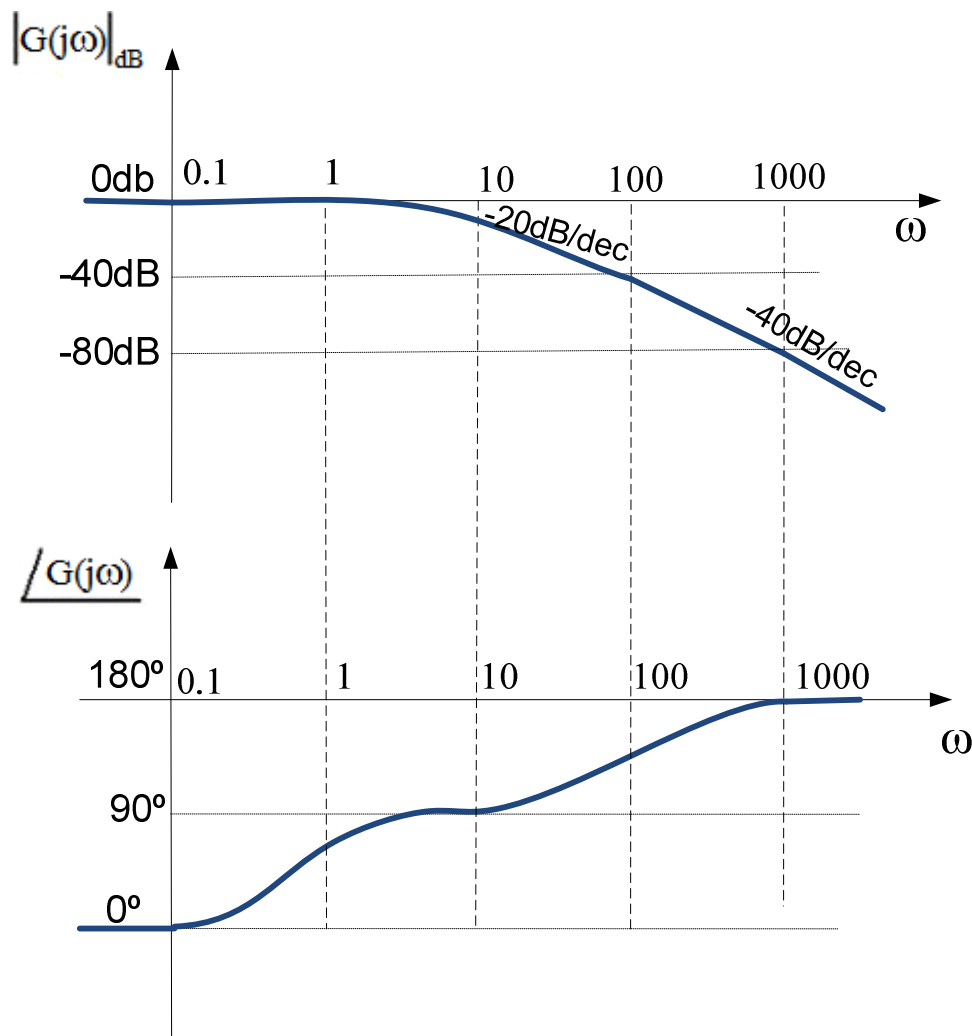


Fig. 9.25 – Diagrama de Bode de *módulo* e *fase* do Exemplo 9.13.

□

9.9 – Exemplos adicionais de construção de diagramas de Bode (módulo e fase)

Nesta secção apresentamos vários exemplos de diagramas de Bode (*módulo e fase*) que foram esboçados usando quase sempre o auxílio dos factores básicos apresentados aqui.

Exemplo 9.14:

$$G(j\omega) = \frac{1000 (s+4)}{s(s+100)(s^2+5s+400)} = \frac{0,1 \left(\frac{1}{4} \cdot s+1 \right)}{s \left(\frac{1}{100} \cdot s+1 \right) \left(\frac{s^2}{400} + \frac{5}{400} \cdot s + 1 \right)}$$

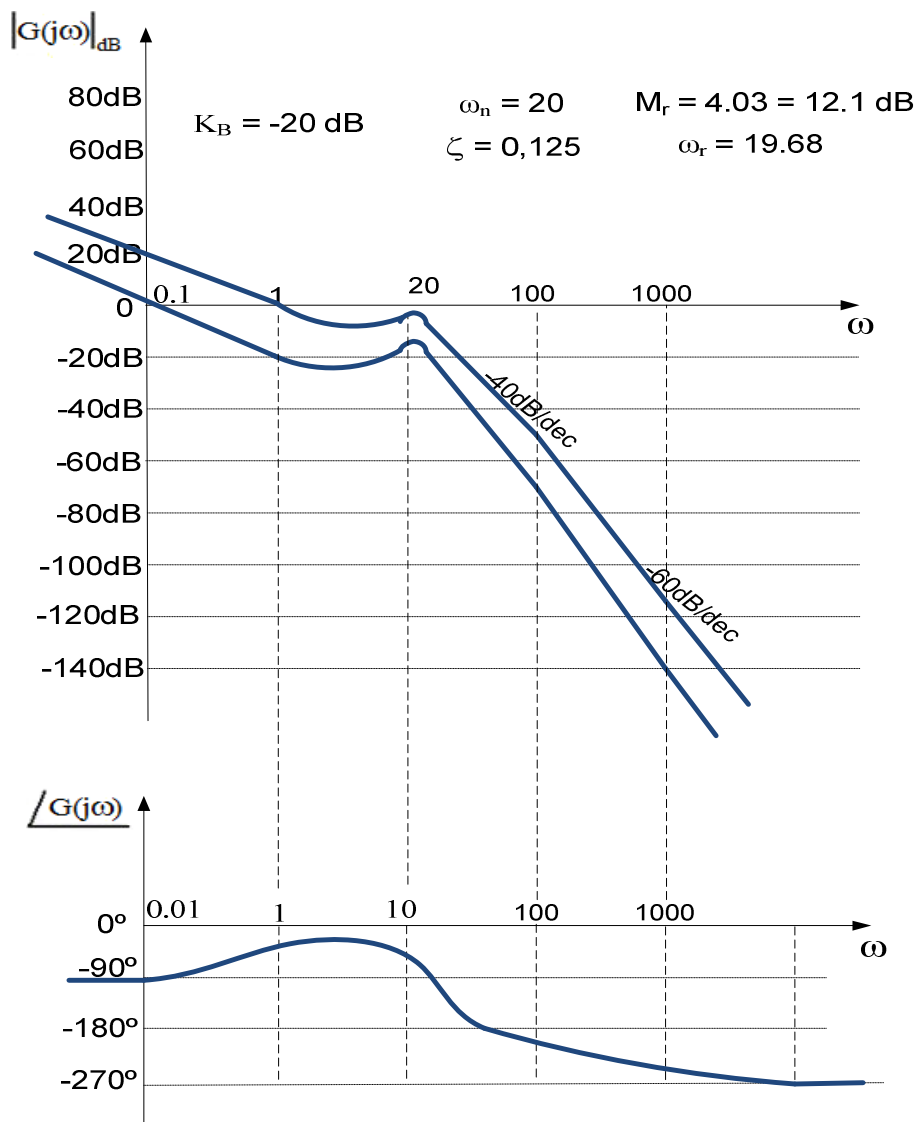


Fig. 9.26 – Diagrama de Bode de *módulo e fase* do Exemplo 9.14.

□

Exemplo 9.15:

$$G(j\omega) = \frac{1000 (s+4)}{s(s+100)(s^2-5s+400)} = \frac{0,1 \left(\frac{1}{4} \cdot s+1 \right)}{s \left(\frac{1}{100} \cdot s+1 \right) \left(\frac{s^2}{400} - \frac{5}{400} \cdot s + 1 \right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual ao do exemplo anterior (Exemplo 9.14). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.27.

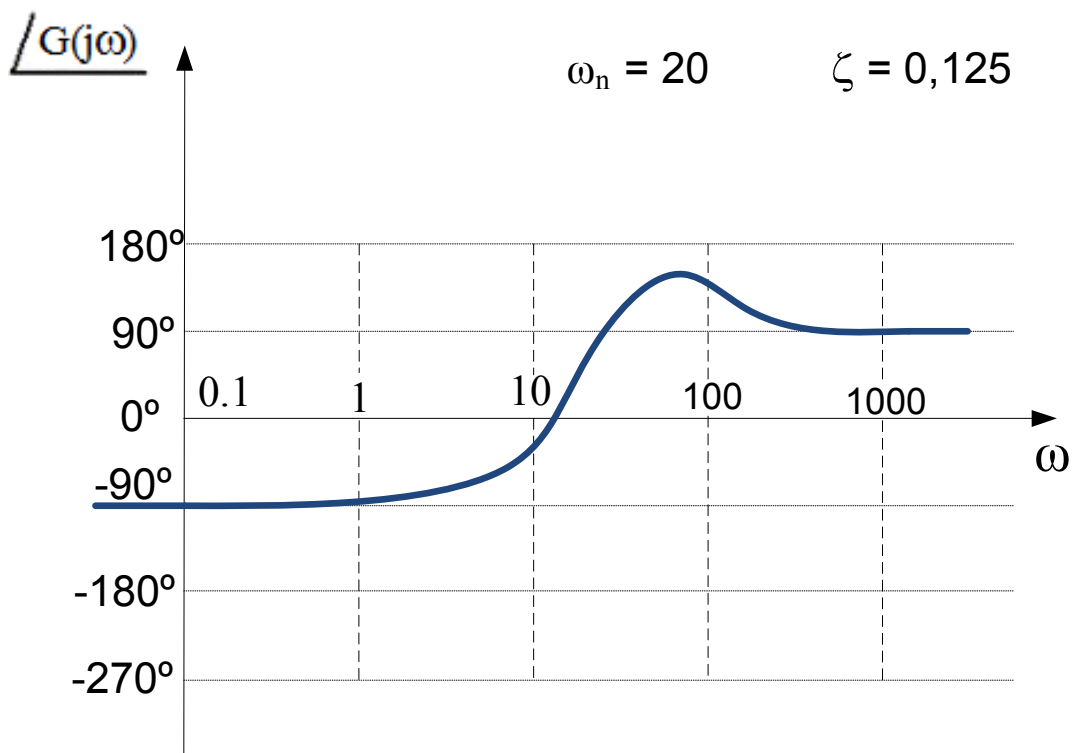


Fig. 9.27 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.15.

□

Exemplo 9.16:

$$G(j\omega) = \frac{1000 (s+4)}{s(s-100)(s^2+5s+400)} = \frac{0,1 \left(\frac{1}{4} \cdot s+1 \right)}{s \left(\frac{1}{100} \cdot s-1 \right) \left(\frac{s^2}{400} + \frac{5}{400} \cdot s + 1 \right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dos 2 exemplos anteriores (Exemplos 9.14 e 9.15). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.28.

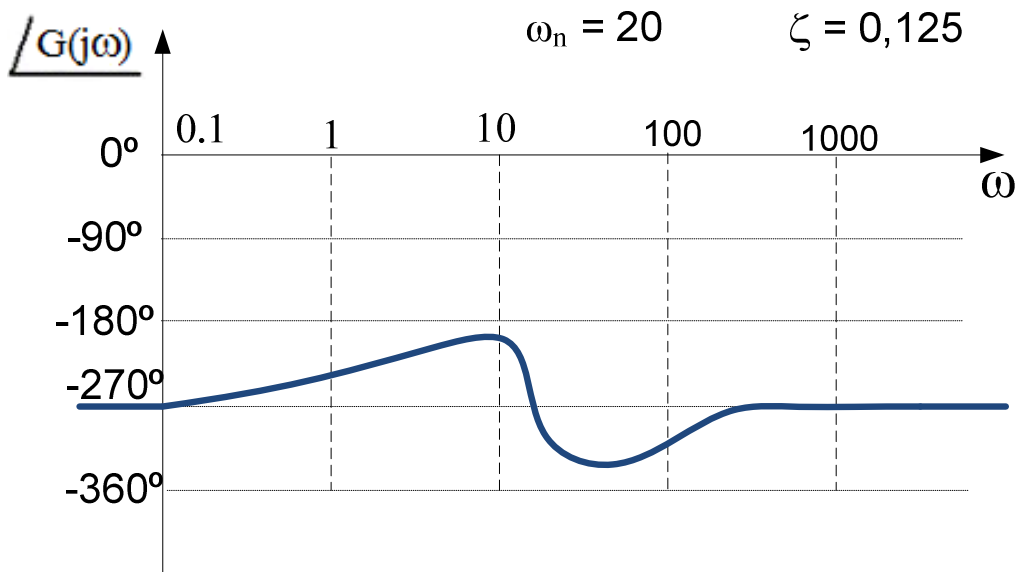


Fig. 9.28 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.16.

□

Exemplo 9.17:

$$G(j\omega) = \frac{1000 (s-4)}{s(s+100)(s^2+5s+400)} = \frac{0,1 \left(\frac{1}{4} \cdot s-1 \right)}{s \left(\frac{1}{100} \cdot s+1 \right) \left(\frac{s^2}{400} + \frac{5}{400} \cdot s + 1 \right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dos três exemplos anteriores (Exemplos 9.14, 9.15 e 9.16). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.29.

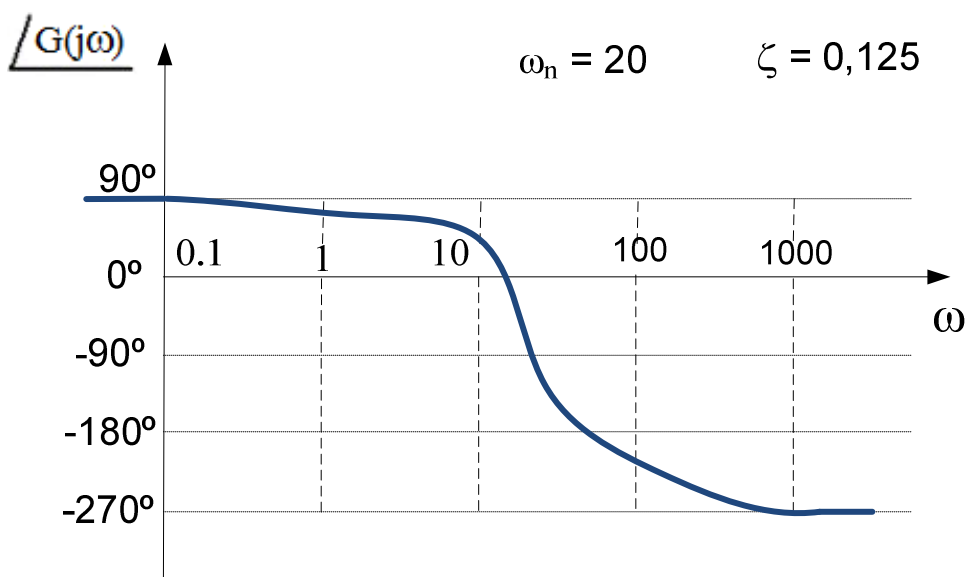


Fig. 9.29 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.17.

□

Exemplo 9.18:

$$G(j\omega) = \frac{1000 (s-4)}{s(s-100)(s^2+5s+400)} = \frac{0,1 \left(\frac{1}{4} \cdot s - 1 \right)}{s \left(\frac{1}{100} \cdot s - 1 \right) \left(\frac{s^2}{400} + \frac{5}{400} \cdot s + 1 \right)}$$

O diagrama de Bode de *módulo* é igual aos dos quatro exemplos anteriores (Exemplos 9.14, 9.15, 9.16 e 9.17). O diagrama de Bode de *fase* está esboçado na figura 9.30.

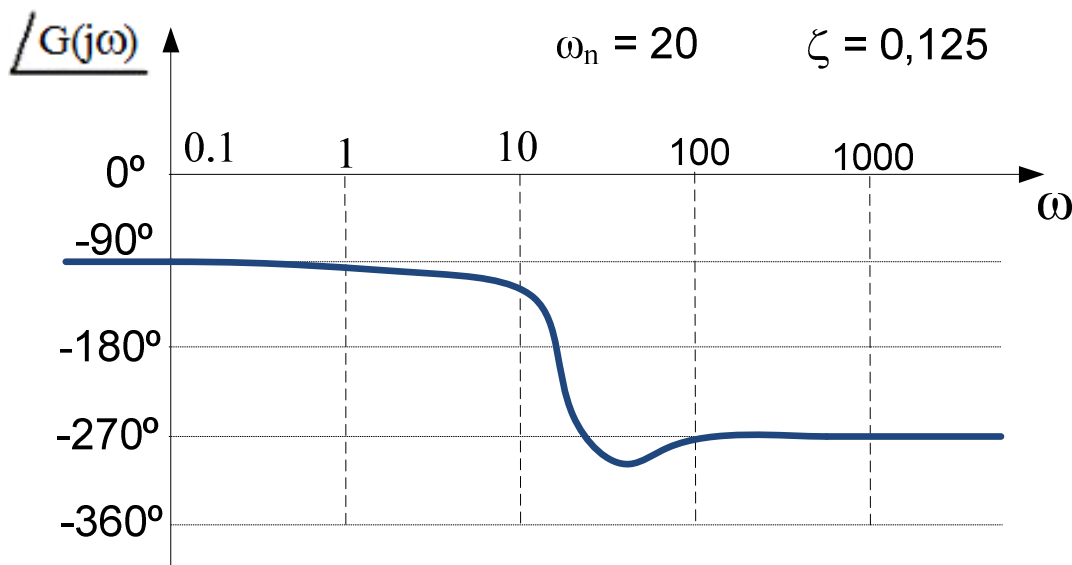


Fig. 9.30 – Diagrama de Bode de *fase* do Exemplo 9.18.

□

Exemplo 9.19:

$$G(j\omega) = \frac{10^6 (s + 0,1)}{s(s+10)(s^2+10^2 s+10^4)} = \frac{(10s + 1)}{s \left(\frac{1}{10} \cdot s + 1 \right) \left(\frac{s^2}{10^4} + \frac{1}{10^2} \cdot s + 1 \right)}$$

Note que

$$K_b = 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega_n = 100$$

$$\zeta = 0,5$$

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} = 70,71$$

$$M_r = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,155 = 0,897 \text{ dB}$$

$$T_1 = 10 \text{ (zero)}$$

$$T_2 = \frac{1}{10} \text{ (pólo)}$$

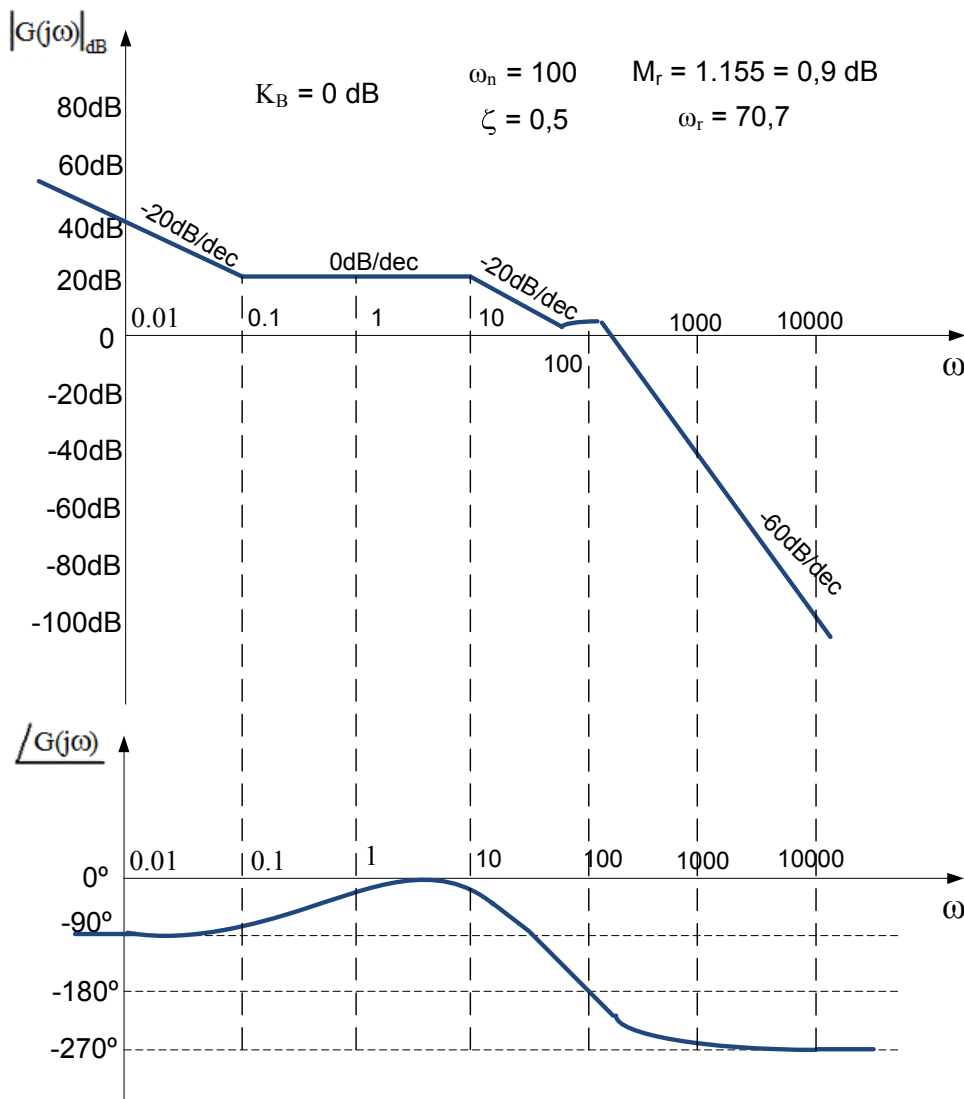


Fig. 9.31 – Diagrama de Bode de fase do Exemplo 9.19.

□

Exemplo 9.20:

$$G(j\omega) = \frac{10 (s + 0,1)}{s(s+10)(s^2+s+1)} = \frac{0,1 (10s + 1)}{s (0,1 \cdot s + 1) (s^2 + s + 1)}$$

Note que

$$K_B = 0,1 = -20 \text{ dB} \qquad \omega_n = 1 \qquad \zeta = 0,5$$

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 0,707 \qquad M_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 1,155 = 0,897 \text{ dB}$$

$$T_1 = 10 \text{ (zero)} \qquad T_2 = \frac{1}{10} \text{ (pólo)}$$

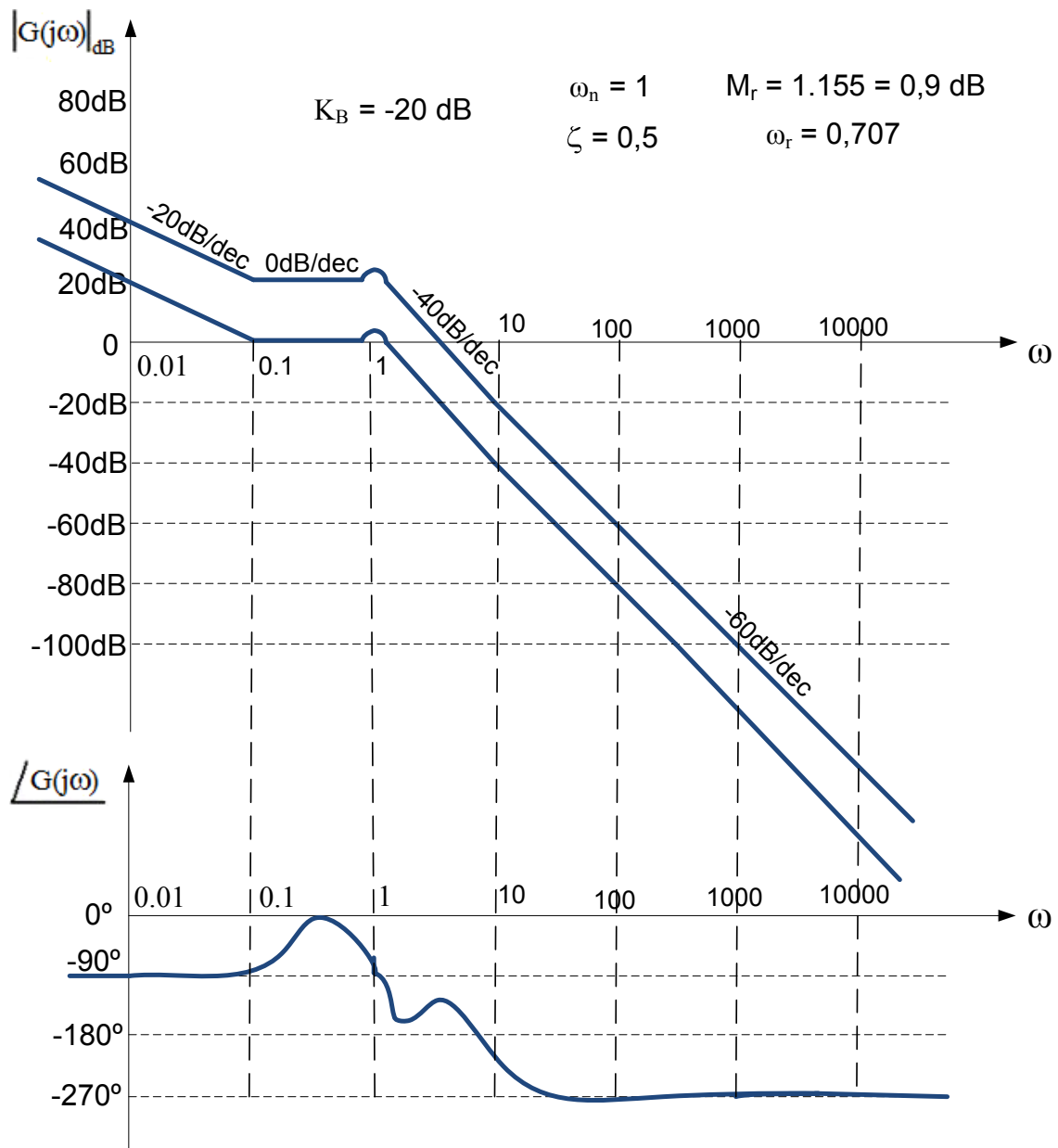


Fig. 9.32 – Diagrama de Bode de fase do Exemplo 9.20.

□

Exemplo 9.21:

$$G(j\omega) = \frac{80 \left(s + \frac{1}{2} \right)}{s(s+20)(s^2+s+2)} = \frac{(2 \cdot s + 1)}{s \left(\frac{s}{20} + 1 \right) \left(\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2} + 1 \right)}$$

Note que

$$K_B = 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\omega_n = \sqrt{2} = 1,414$$

$$\zeta = 0,354$$

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} = 1,224$$

$$M_r = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,069 = 0,58 \text{ dB}$$

$$T_1 = 2 \text{ (zero da F.T.)}$$

$$T_2 = \frac{1}{20} \text{ (pólo da F.T.)}$$

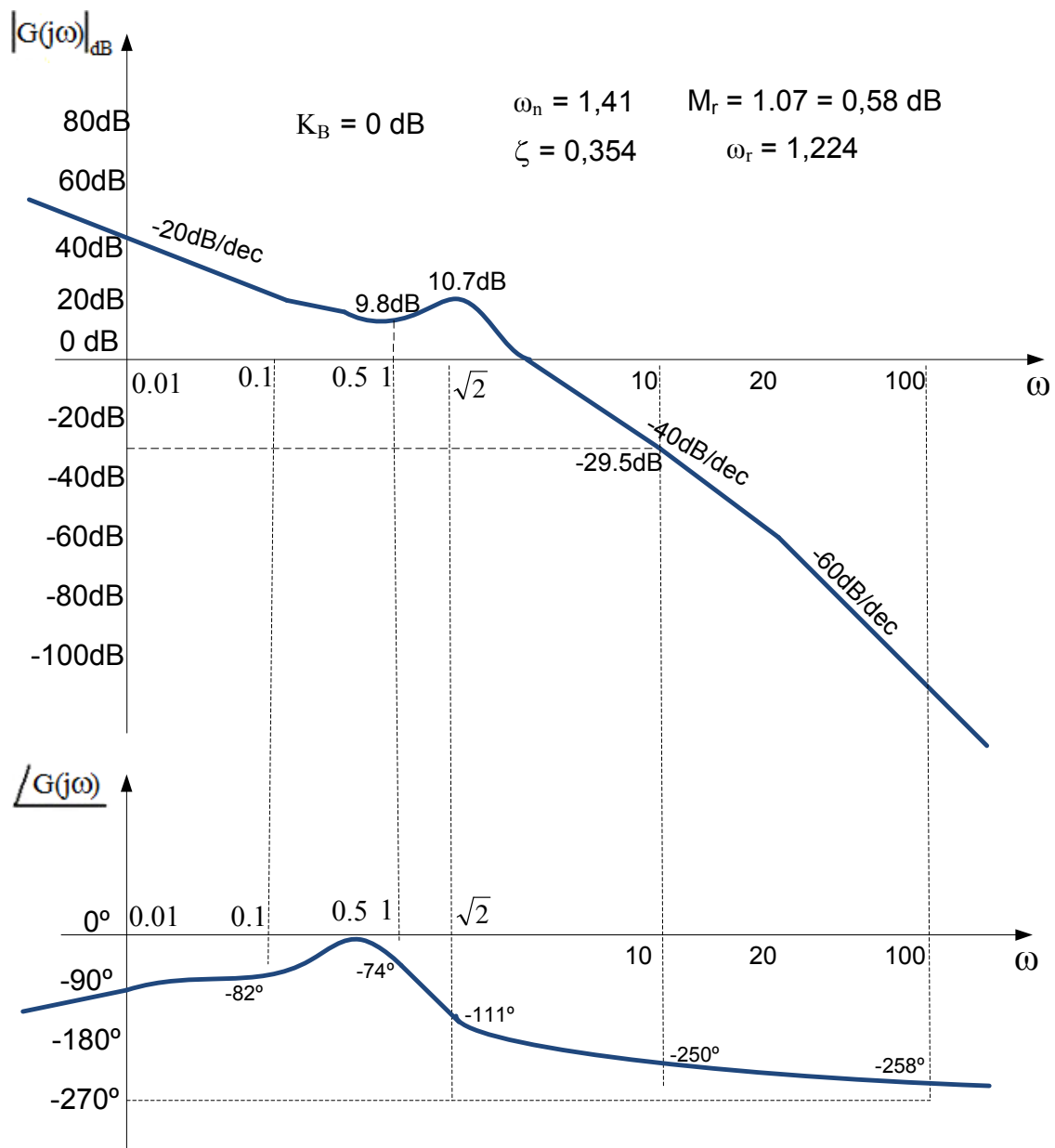


Fig. 9.33 – Diagrama de Bode de fase do Exemplo 9.21.

□