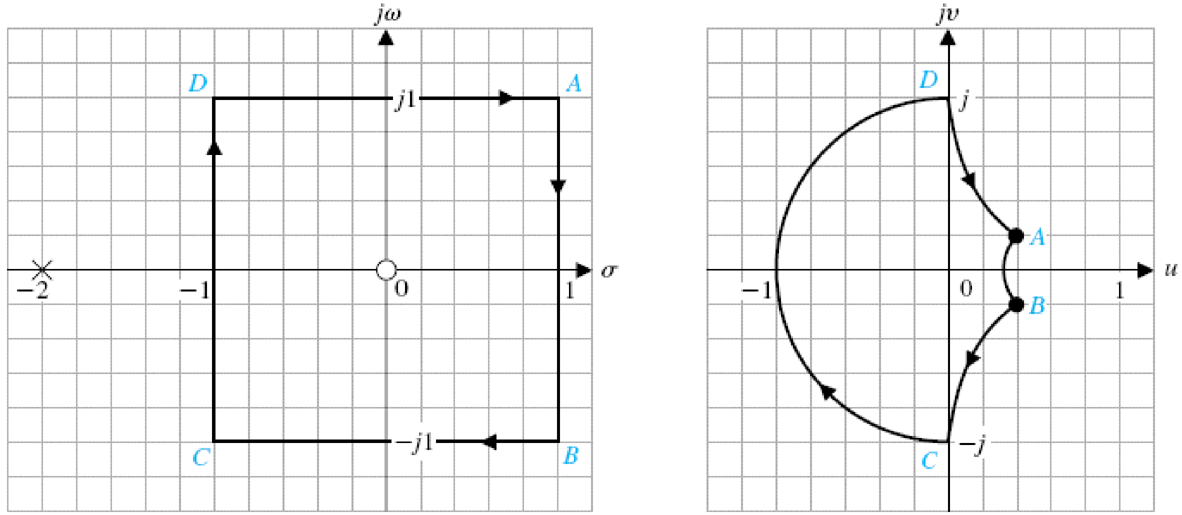
Um outro exemplo:

$$F(s) = \frac{s}{s+2}$$



O contorno no plano F(s) envolve a origem porque o plano F(s) fica situado dentro da área envolvida por este contorno.

O teorema de Cauchy diz respeito ao mapeamento de uma função F(s) que possua um numero finito de pólos e zeros no interior do contorno, de modo a expressar a F(s) como:

$$F(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s+s_i)}{\prod_{k=1}^{M}(s+s_k)}$$

Onde s_i são os zeros e s_k são os pólos de F(s)

A funçao F(s) é a EC e, assim $F(s) = 1 + L(s)$

Em que $L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

Tem-se por conseguinte

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s)+N(s)}{D(s)} = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s+s_i)}{\prod_{k=1}^{M}(s+s_k)}$$

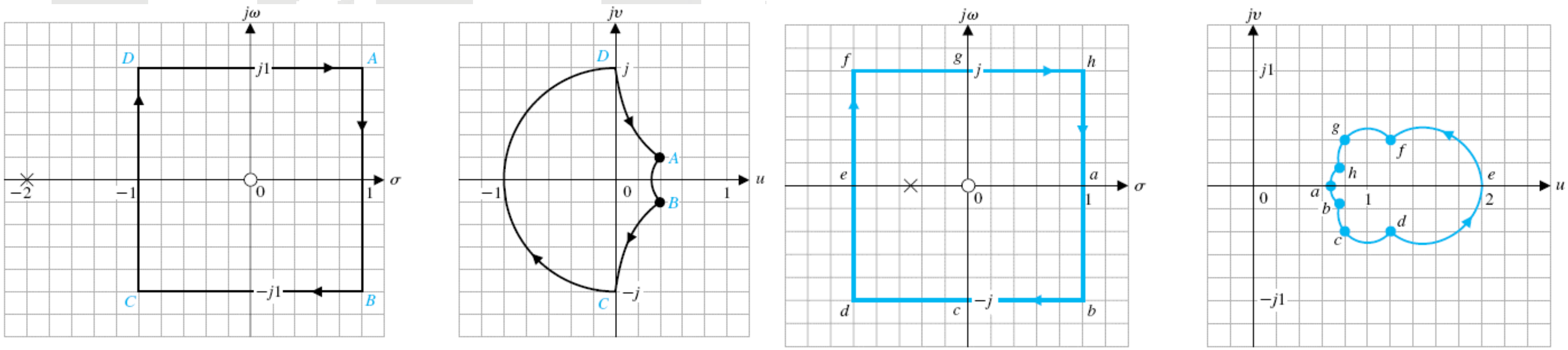
Contudo, as raízes características do sistema e que indicam sua reposta são os zeros de F(s). Isto se torna evidente ao lembrar que a saída do sistema é:

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta(s)} R(s) = \frac{\sum P_k \Delta_k}{F(s)} R(s)$$

Teorema de Cauchy (principio do argumento)

Se um contorno Γ_s no plano s circunscreve *Z* zeros e *P* pólos de *F(s)* e não passar por nenhum dos pólos e zeros de *F(s)* ao ser feito um percurso no sentido horário ao longo do contorno Γ_F correspondente no plano *F(s)* circunscreverá a origem do plano *F(s)* *N=Z-P* vezes no sentido horário.

Para F(s)=s/(s+2)



O teorema de Cauchy pode também compreendido considerando F(s) em termos do ângulo devido a cada polo e a cada zero à medida que o contorno Γ_s é percorrido no sentido horário. Seja a função

$$F(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

Pode ser escrita

$$F(s) = |F(s)|\,\angle F(s) = \frac{|s+z_1||s+z_2|}{|s+p_1||s+p_2|}\left(\angle s+z_1 + \angle s+z_2 - \angle s+p_1 - \angle s+p_2\right)$$

$$= |F(s)|\left(\phi_{z1} + \phi_{z2} - \phi_{p1} - \phi_{p2}\right)$$

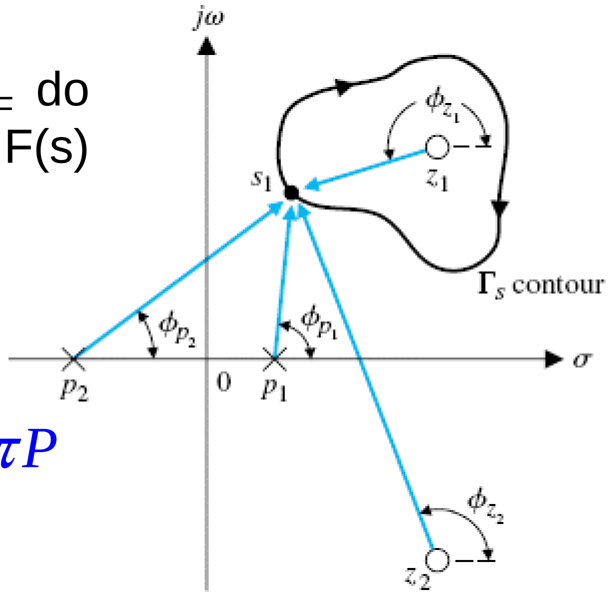
Considerando os vetores mostrado para o contorno Γ_s é possível determinar os ângulos à medida que s descreve o contorno.

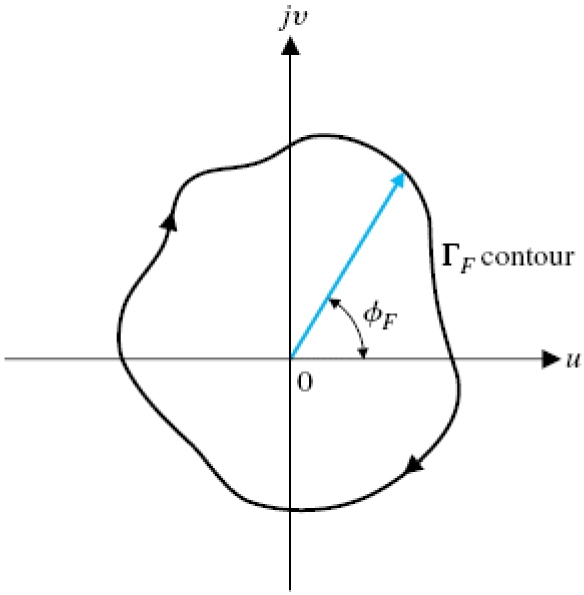
Ângulo total de Γ_F do contorno no plano F(s) é:

$$\phi_F = \phi_Z - \phi_P$$

ou

$$2\pi N = 2\pi Z - 2\pi P$$

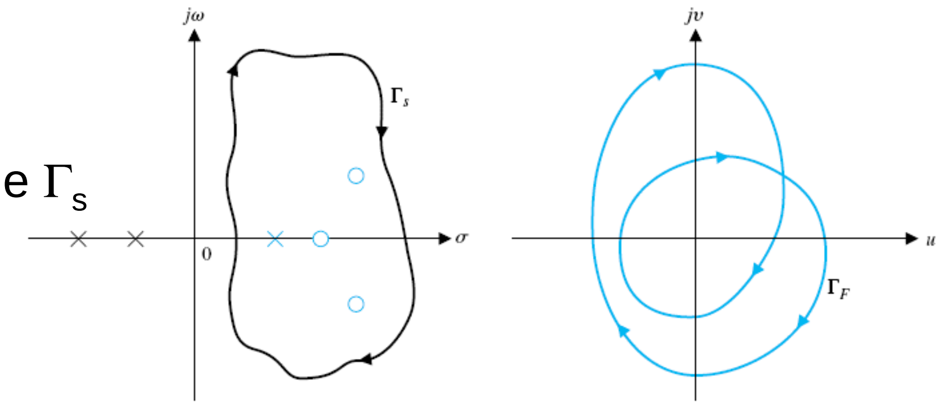


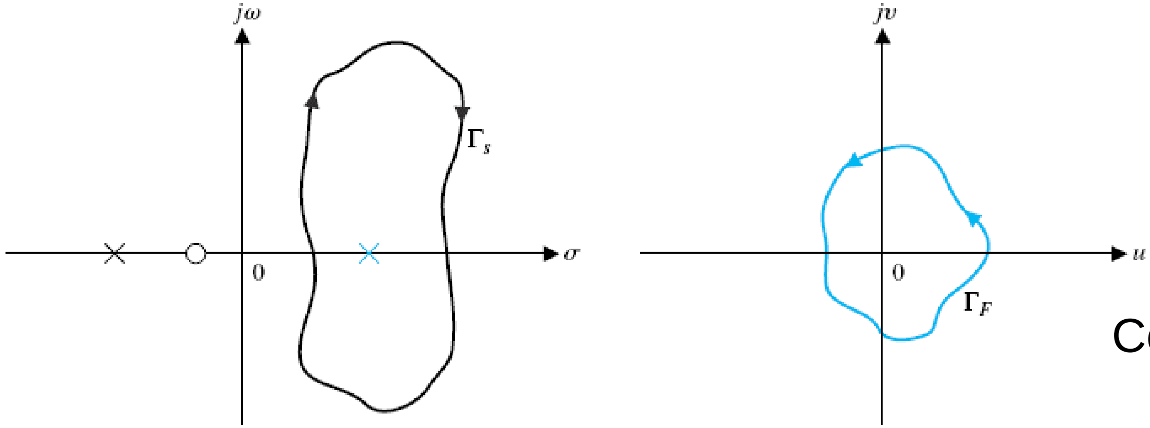


Exemplo do uso do Teorema de Cauchy.

Com 3 zeros e 1 pólo no interior de Γ_s

$$N = 3 - 1 = +2$$





Com 1 pólo no interior de Γ_s

$$N = Z - P = -1$$

$$F(s) = 1 + L(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s+s_i)}{\prod_{k=1}^{M}(s+s_k)} = 0$$

$$Z = N + P$$

$$F(s) = 1 + L(s)$$

$$F^{'}(s) = F(s) - 1 = L(s)$$

$$Z = N + P$$

Critério de Nyquist

Para investigar a estabilidade de um sistema de controle, considera-se a EC:

$$F(s) = 1 + L(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{n}(s+s_i)}{\prod_{k=1}^{M}(s+s_k)} = 0$$

Para determinar se um sistema é estável, escolhe-se um contorno Γ_s que envolve inteiramente o semiplano s da direita e se determina se há zeros de F(s) no interior de Γ_s.
Traça-se Γ_F no plano F(s) e se determina o numero de circunscrições N da origem.
Então, o numero de zeros de F(s) no interior do contorno Γ_s [portanto, o de zeros instáveis de F(s)] é

$$Z = N + P$$

O contorno é completado por um percurso semicircular de raio infinito. Agora o critério de Nyquist diz respeito à EC:

$$F(s) = 1 + L(s)$$

E ao numero de circunscrições da origem do plano de F(s)