Sexta-feira, 30 de Abril de 2004

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação

Seminário de controle de Sistemas Dinâmicos

Título: Mode a e de Mat e át ca de S st e as nâ cos

Léo Santana Pres
Mest andore n e a a Mecân ca
ac dade de n e a a Mecân ca/ n ca

o a o Ab de 2004

Sistemas Não-Lineares

- Um sistema é não linear se não se aplica o princípio da superposição. Assim, nos sistemas não lineares a resposta a duas entradas não pode ser calculada tratando-se uma entrada de cada vez e adicionando-se os resultados. Exemplo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A\,\mathrm{sen}\,x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

- Embora muitas relações físicas sejam frequentemente representadas por equações lineares, na maioria dos casos as relações reais não são exatamente lineares.

Linearização de Sistemas Não lineares

- Frequentemente, em sistemas de controle, a operação normal do sistema pode ser em torno do ponto de equilíbrio, e os sinais podem ser considerados sinais pequenos em torno do equilíbrio.

- No entanto, se o sistema opera em torno do ponto de equilíbrio e se os sinais envolvidos são sinais pequenos, então é possível aproximar o sistema não linear por um sistema linear. Esse sistema linear é equivalente ao sistema não linear considerado dentro de uma faixa de operação limitada.

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E RESPOSTA IMPULSIONAL

Função de Transferência → Usada para caracterizar as relações de entrada saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo.

ons de e se o s s e a mea n a an e no e o de n da e a se n e e a ão d e enc a :

$$a_0 y^{n} + a\, y^{(n-\ )} + \ldots + a_{n-}\, y = b_0\, x^{(m)} + b\, x^{(m-\ )} + \ldots + b_{(m-\ )}\dot{x} + b_m x \qquad (\mathrm{n} \geq \ )$$

onde y é o s na de sa da do s s e a e x é o s na de en ada.

=> A n ão de ans e ênc a des e s s e a é ob da o ado se a ans o ada de a ace de a bos os e b os da e a ão, s na de sa da e s na de en ada, es ec a en e, na o ese de odas as cond ões n c a s se e n as:

Função de transferência = G(s) = ℒ[Saída]/ ℒ(Entrada)=

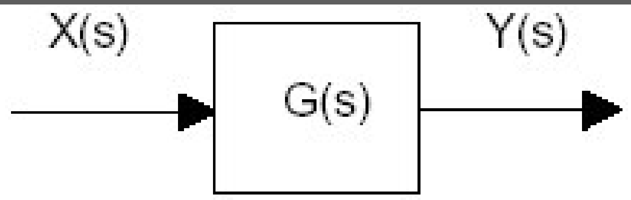
$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b\, s^{m-} + \ldots + b_{m-}\, s + b_m}{a_0 s^n + a\, s^{n-} + \ldots + a_{n-}\, s + a_n}$$

1. DIAGRAMA DE BLOCOS

- Um sistema de controle pode ser constituído de um certo número de componentes. Em engenharia de controle, para mostrar as funções desempenhadas por cada componente, costuma-se usar um diagrama chamado *diagrama de blocos*.

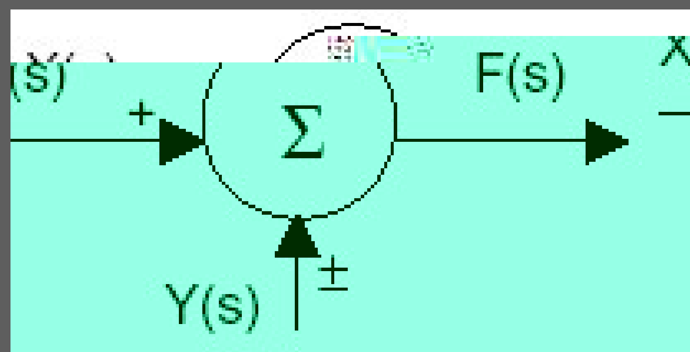
d a a a de b ocos é u a re resen t a ão das f u n ões desem em adas o cada u dos co omen t es e do f u xo de s na s en t e e es. f e ndo de u a re resen t a ão a t e á t ca u a en t e abs t a t a, o d a a a de b ocos t e a an t a e de nd ca a s ea s t ca en t e os f u xos de s na do s s t e a ea .

Função de transferência:



Variável de entrada – X(s)
Variável de saída – Y(s)
Função de transferência – G(s)
Relação representada – Y(s)=G(s) X(s)

Ponto de soma: sinal de + ou de – de te cada seta ento orientado indica se este sinal deve ser adicionado ou subtraído.



Ponto de derivação: u on t o de de a ão é u on t o a
a t do a u o s na o t en en e de u b oco a
s u t am e a en t e a a o u os b ocos o u on t os de so a

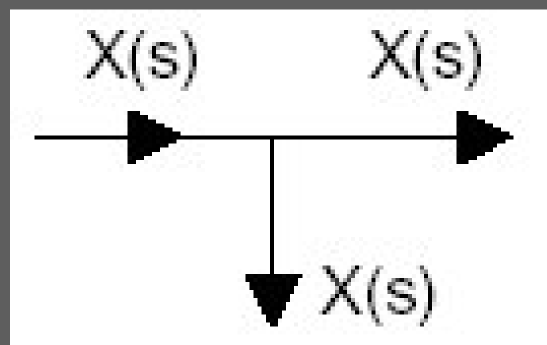
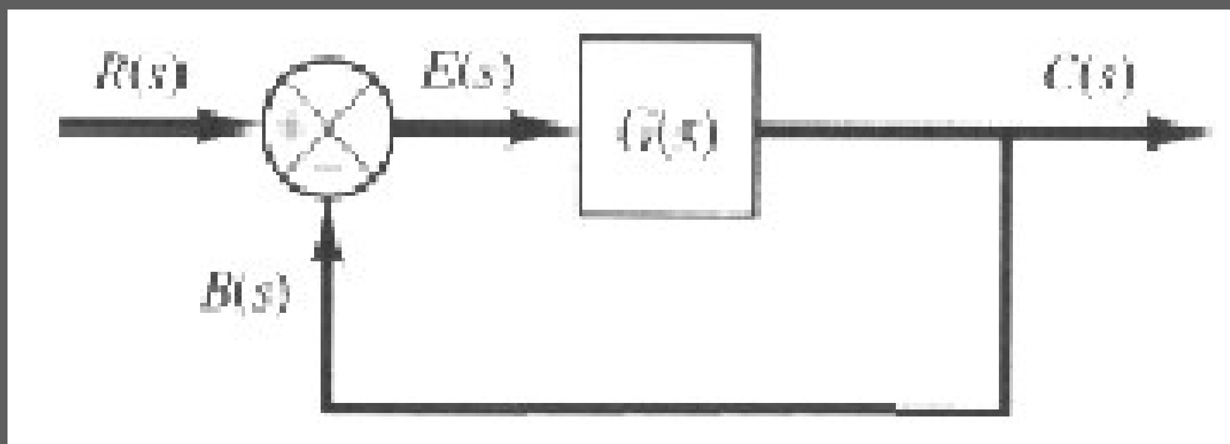


Diagrama de Blocos de Um Sistema à Malha Fechada:

A f a os a exe o de d a a a de b ocos de s s e a a a a f ec ada. A sa da (s) e oa e ao on o de so a, onde é co a ada co o s na de en ada de e e ênc a R(s).



F a S s e a a a f ec ada

Função de Transferência a Malha Aberta e função de Transferência de Ação Direta:

Com relação à figura 2, a relação entre o sinal de retroação B(s) e o sinal de erro atuante E(s) é chamada função de transferência à malha aberta. Isto é:

Função de Transferência a malha aberta = $\dfrac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$

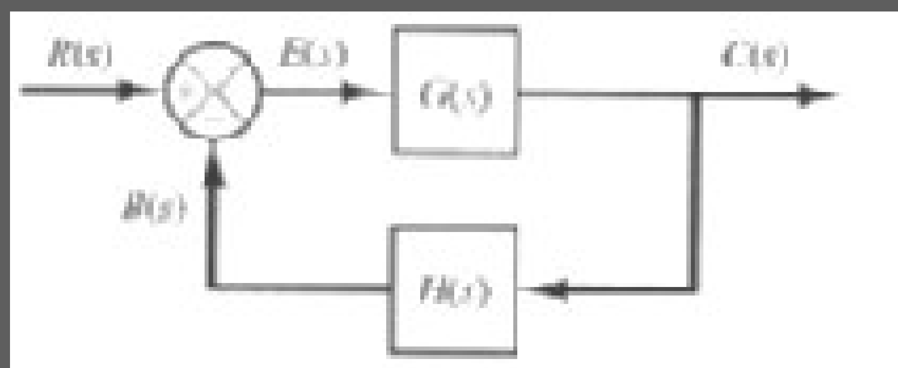


Figura 2 Sistema à malha fechada

A relação entre o sinal de saída C(s) e o sinal de erro atuante E(s) é chamada função de transferência de malha direta, assim

$$\text{Função de transferência de malha direta} = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Função de Transferência à malha fechada: Referindo-se novamente à figura 2, o sinal de saída C(s) e o sinal de entrada R(s) estão relacionados como segue:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$= R(s) - H(s)C(s)$$

Eliminando-se E(s)

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

ou

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

que é a *função de transferência a malha fechada*, onde a entrada e a saída do sistema estão relacionadas.

Ad t ndo se e u u s se t a u a á e en o a n n t e ado es. S u om a se t a b é e u a a s na s de en t ada u (t), ..., u (t) e s na s de sa da y (t), ..., y (t).

e m e se as n a á e s de sa da dos n t e ado es co o a á e s de es t ado co a o es x (t), ..., x_n(t).

s ste a odeen ão se esc t o o :

$$\dot{x}(t) = f(x ,\ldots, x_n; u ,\ldots, u_r, t) \qquad 4.$$

.

.

.

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x ,\ldots, x_n; u ,\ldots u_r, t)$$

- a o res de sa da y (t), ..., y (t) são dados o :

$$y\ (t) = g\ (x\ ,\ldots x_n ; u\ ,\ldots u_r , t) \qquad 4.2$$

.

.

.

$$y_m(t) = g_m(x\ ,\ldots x_n ; u\ ,\ldots u_r , t)$$

Pode se esc os s st as an o es na o a a c a:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x\ (t). \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f\ (x\ ,\dots, x_n; u\ ,\dots, u_r, t) \\ . \\ . \\ .f_n(x\ ,\dots, x_n; u\ ,\dots u_r, t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y\ (t). \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g\ (x\ ,\dots, x_n; u\ ,\dots, u_r, t) \\ . \\ . \\ .g_n(x\ ,\dots, x_n; u\ ,\dots u_r, t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u\ (t). \\ . \\ . \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

5. Representação de Sistemas Dinâmicos

$$\dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

.

.

.

$$\dot{x}_{n-} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x - \ldots - a x_n + u$$

o ŭ

$$\dot{x} = \mathbf{Ax+Bu} \quad 5$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \\ -a_n & -a_{n-} & -a_{n-2} & . & . & . & -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix}$$

a sa da'e dada o :

$$y = [\;\; 0 \ldots 0] \begin{bmatrix} x \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

o u s e a:

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \qquad \mathbf{5.2}$$

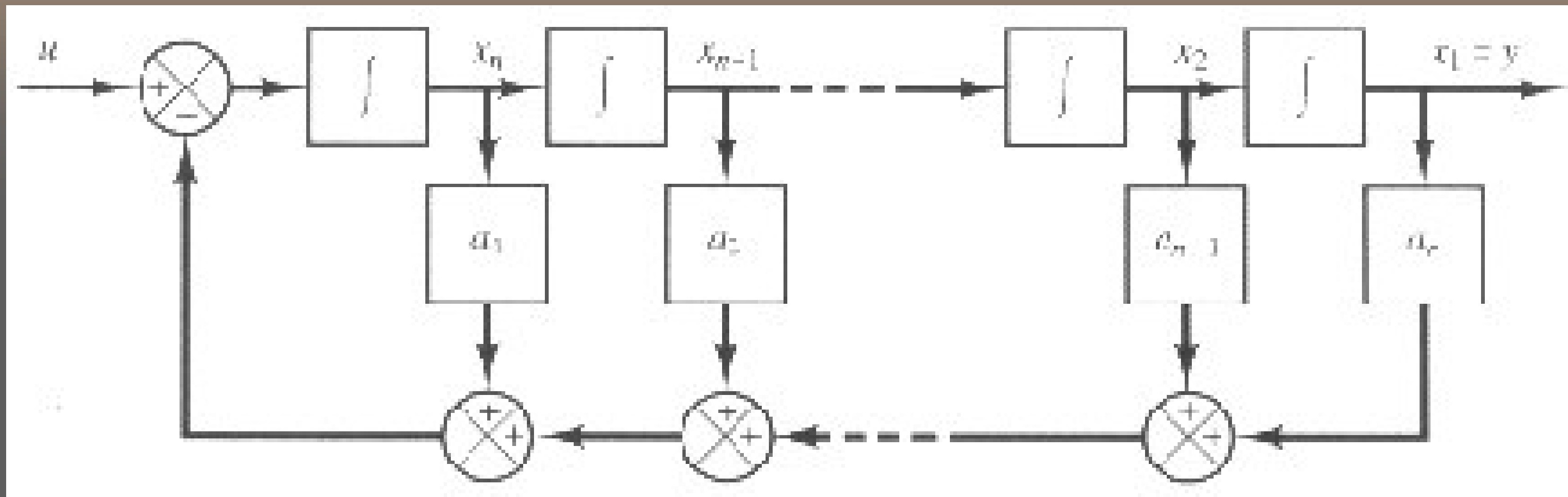
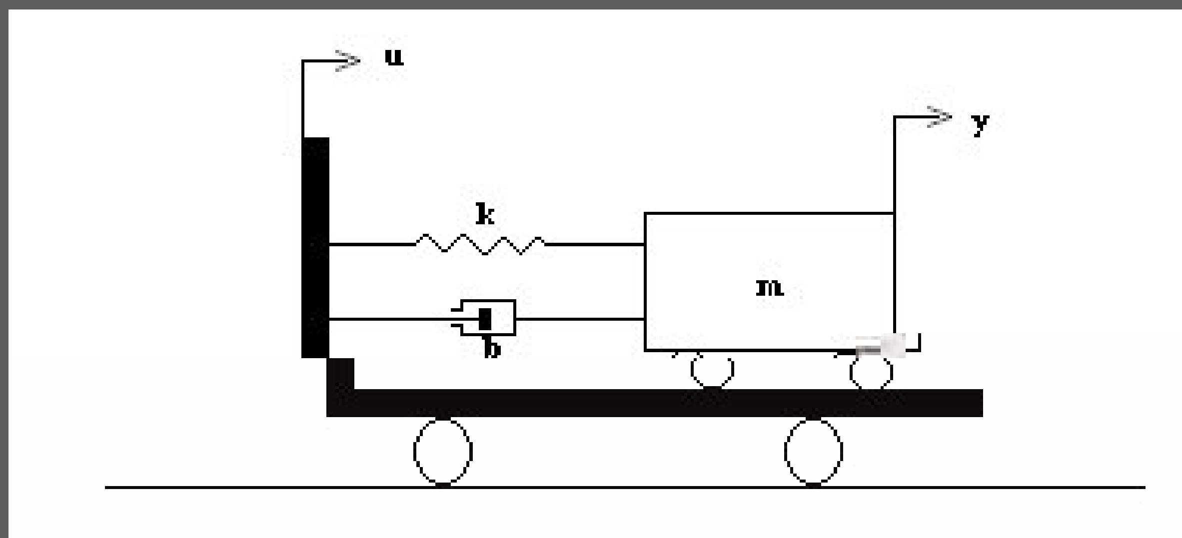


Figura 5.1 Realização sob a forma de diagramas de blocos das equações de estado e de resposta dadas, respectivamente, pelas equações 5.1 e 5.2.

SISTEMAS MECÂNICOS

Se a o s ste a assa o a a o tecedo scoso on tado sob e u a ca eta se assa, co fo e os t a a f u a 5.2.



F u a 5.2 S ste a assa o a a o tecedo on tado sob e u a ca eta

Pa a s s t as t ans ac ona s a s nda de N t on
s t abe ece :

$$a = \Sigma$$

onde é a assa, a é a ace a ão da assa Σ é a so a
a éb ca de t odas as o as a cadas à assa . A cando a
s nda de N t on ao esen t s t a an t da a
o t es de t a ca t a s assa, ob t é s

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y-u)$$

o u

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = \frac{du}{dt} + ku \qquad 5.3$$

A e a ão 5.3 é u ode o a e á co do s s e a cons de ado.

Assim, a função de transferência pode ser escrita:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs +}{s^2 + bs +}$$

A se[illegible] será obtida a re[illegible]ação do sistema [illegible] modelo na representação de espaço de estado.

o a ando se n c a ente a e a ão d fe enc a deste s ste a

$$\ddot{y}+\frac{b}{m}\dot{y}+\frac{k}{m}y=\frac{b}{m}\dot{u}+\frac{k}{m}u$$

co a fo a ad on zada

$$\ddot{y}+a\ \dot{y}+a_2y=b_0\ddot{u}+b\ \dot{u}+b_2u$$

o o se a a de s se a co exc a ão, é e a a de n ca ão dos co c en es a , a_2, b_0, b , b_2 co o se se e:

a =b/ , a_2= / , b_0=0, b =b/ , b_2= /

ass :

$$\beta_0=b_0=0,$$

$$\beta \ =b \ \ a \ \beta_0=b/ \ ,$$

$$\beta_2=b_2 \ a \ \beta \ \ a_2\beta_0= \ / \ \ (b/ \ )^2$$

Ass , def me se as a á e s de es ado:

t

$x = y \; \beta_0 = y$

$x_2 = \dot{x} \; \beta = \dot{x} \; (b/ \;)$

=> As e a o es de s ado se o na

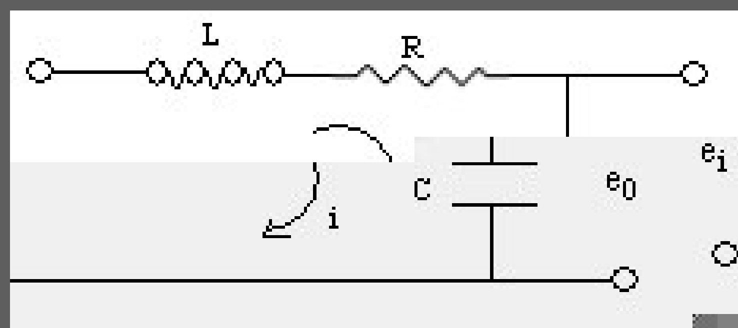
$\dot{x} = x_2 + \beta = x_2+(b/ \;)$

$\dot{x}_2 = a_2 x \; a \; x_2+\beta_2 = (\; / \;)x \; (b/ \;)x_2+[\; / \; (b/ \;)^2]$

e

y=x => e a ão de sa da

c o RL : Se a o c c o nd cado na a 5.3:



a 5.3 c o co RL

Aplicando-se as leis de Kirchhoff ao sistema, obtêm-se as seguintes equações

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i \qquad 5.4$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_0$$

Este é o modelo matemático que representa a dinâmica do circuito.

Aplicando-se as transformadas de Laplace nas equações acima e admitindo-se que as condições iniciais sejam nulas, obtém-se:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_0(s)$$

Assim, tem-se a função de transferência:

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{}{LCs^2 + RCs +} \qquad 5.5$$

Representação no espaço de estados: Pode-se representar o sistema da figura 5.3 através de uma representação no espaço de estado. Pode-se obter a equação diferencial do sistema a partir do resultado da equação 5.5:

$$\ddot{e}_0 + \frac{R}{L}\dot{e}_0 + \frac{1}{LC}e_0 = \frac{1}{LC}e_i \qquad (5.6)$$

n ndo s co o a á s d s ados:

$$x = e_0$$

$$x_2 = \dot{e}_0$$

co o a á s d n ada sa da:

$$u = e$$

$$y = e_0 = x$$

SISTEMAS DE NÍVEL DE LÍQUIDO

Se a o s s t e a os t ado na f a 5.4.

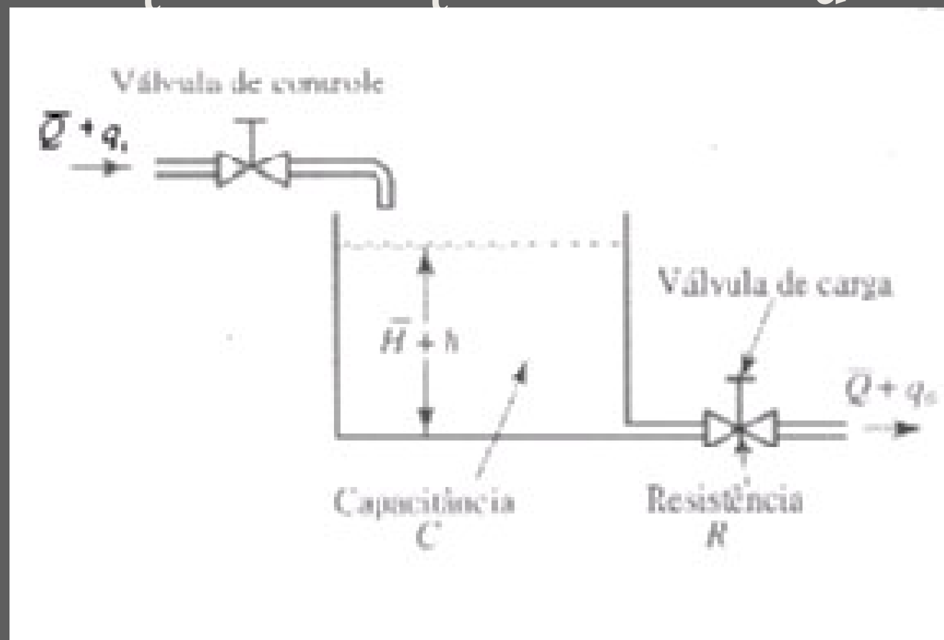


Figura 5.4 S s t e a de n e de do

As a á e s são def n das co o se ue:

$\overline{Q}$ = a o da azão e e e e s ac oná o (an e s da oco ênc a de a e a a ão), ³/s

= e eno de s o da azão de en ada e e a ão a se a o de e e e s ac oná o, ³/s

$_0$ = e eno de s o azão de sa da e e a ão a se a o de e e e s ac oná o, ³/s

$\overline{H}$ = a a do n e e e e e s ac oná o (an e s da oco ênc a de a e a a ão)

h = e eno de s o na a a do n e e e a ão a se a o e e e e s ac oná o,

ecân ca dos f dos, s s e a ode se cons de ado
mea se o f xo f o mea . Baseado na o ese de e o f xo
se a mea , o mea zado, a e a ão d e enc a des e s s e a
ode se ob do co o se e:

a ez e a azão de en ada enos a azão de sa da,
d an e e eno n e a o d , é a à an dade
ad c ona a azenada no ese ao o, cons a a se e:

$$d =(\quad {}_0)d$$

Considerando-se a definição de resistência, a relação entre q_0 e h é dada por:

$$q_0 = h/R$$

A equação diferencial para este sistema para um valor constante de R é a seguinte:

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

A cando a ansfo ada de La ace à a bos os e b os da e a ão, s ondo cond o es n c a s n as:

$$(R \quad + \quad)\, I(s) = R \quad (s)$$

onde $I(s) = \mathcal{L}(i \quad)$ $\qquad (s) = \mathcal{L}(\quad)$

a a

> andeza de ent ada

> andeza de sa da

n ão de t ansf ênc a: $\dfrac{H(s)}{Q_i(s)} = \dfrac{R}{RCs +}$

Po é , se:

$_0$ > andeza de sa da

n ão de t ansfe ênc a: $$\frac{Q_0(s)}{Q_i(s)} = \frac{}{RCs +}$$

nde $_0$=(/ R) i(s)