

# Diagrama de Bode

custo

Prof<sup>a</sup> Ninoska Bojorge

---

---

---

---

## Traçado das Assíntotas

### • Traçado Aproximado:

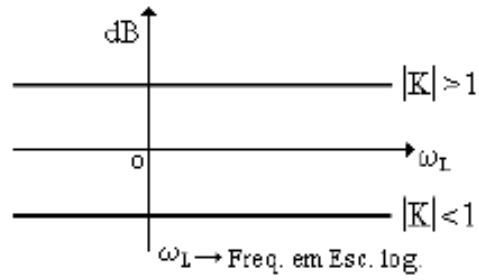
Devido às escalas empregadas nos Diagramas de Bode, estes podem ser construídos em forma aproximada mediante traços retos ou assíntotas de módulo e fase. Elas aproximam a curva real, somando-se as contribuições individuais de cada pólo ou zero.

As figuras seguintes mostra os diagramas de Bode aproximados para funciones simples de 1<sup>a</sup> ordem. No caso de 2<sup>a</sup> ordem, as aproximações podem ser bastante longe dos diagramas exatos, dependendo do fator de amortecimento.

# Traçado das Assíntotas

## Ganho constante K

- Módulo:  $M_{dB} = 20 \log |K|$
- Fase:  $\Phi = 0^\circ$



3

$F(s)$	$ F(j\omega) $	$\arg F(j\omega)$
$K > 0$		
$K < 0$		
$s$		
$\frac{1}{s}$		
$\frac{s+a}{a} \quad a > 0$		
$\frac{a}{s+a} \quad a > 0$		
$\frac{s-a}{-a} \quad a > 0$		
$\frac{-a}{s-a} \quad a > 0$		

4

$F(s)$	$ F(j\omega) $	$\arg F(j\omega)$
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $\xi\omega_n > 0$		
$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $\xi\omega_n < 0$		
$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ $\xi\omega_n > 0$		
$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ $\xi\omega_n < 0$		

5

## Funções de Transferência Complexa

Considere-se a FT complexa  $G(s)$ ,

$$G(s) = \frac{G_a(s)G_b(s)G_c(s)\cdots}{G_1(s)G_2(s)G_3(s)\cdots} \quad (1)$$

Substitui-se  $s=j\omega$ ,

$$G(j\omega) = \frac{G_a(j\omega)G_b(j\omega)G_c(j\omega)\cdots}{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)\cdots} \quad (2)$$

De teoria de variáveis complexas, podemos expressar a magnitude e o ângulo de fase como segue:

$$|G(j\omega)| = \frac{|G_a(j\omega)||G_b(j\omega)||G_c(j\omega)|\cdots}{|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|\cdots} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle G_a(j\omega) + \angle G_b(j\omega) + \angle G_c(j\omega) + \cdots \\ &\quad - [\angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \angle G_3(j\omega) + \cdots] \end{aligned} \quad (4)$$

6

## Diagrama de Bode

- O gráfico, chamado de *diagrama de Bode*, fornece uma exposição conveniente das respostas características em frequência de um modelo de função de transferência. É constituído por parcelas de  $AR$  e em função de  $\omega$ .
- Normalmente,  $\omega$  e  $\phi$  é expresso em unidades de radians/tempo .

### Diagrama de Bode para Sistema 1ª ordem

seja: 
$$AR_N = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \text{ and } \phi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

- A baixa frequência ( $\omega \rightarrow 0$  e  $\omega\tau \ll 1$ ):  
 $AR_N = 1$  e  $\phi = 0$
- A alta frequência ( $\omega \rightarrow \infty$  e  $\omega\tau \gg 1$ ):  
 $AR_N = 1/\omega\tau$  e  $\phi = -90$

7

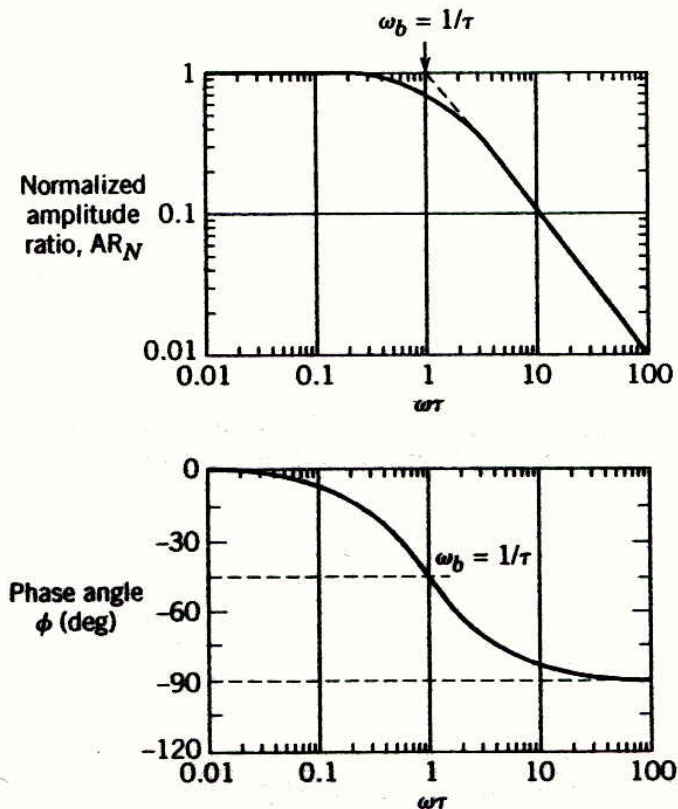


Figure 13.2 Bode diagram for a first-order process. (Seborg)

8

- 
- Note-se que as assíntotas cruzam em  $\omega = \omega_b = 1/\tau$ , conhecidas como **frequência do ponto de interrupção** ou **frequência angular**. Aqui o valor de  $AR_N$  é:

$$AR_N(\omega = \omega_b) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = 0.707 \quad (5)$$

- Alguns livros e software define-se AR de forma diferente, em termos de decibéis. Nesse caso, a relação de amplitude em decibéis  $AR_{dB}$  é definida como:

$$AR_{dB} = 20 \log AR \quad (6)$$

---

## Processo com elementos Integração

a função de transferência para o elemento com integração foi definida na aula anterior como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s} \quad (7)$$

$$AR = |G(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega} \right| = \frac{K}{\omega} \quad (8)$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \angle K - \angle(\infty) = -90^\circ \quad (9)$$

## Processo de Segunda Ordem

Uma função de transferência geral que descreve qualquer resposta subamortecida, criticamente amortecida ou sobreamortecidos de sistema de segunda ordem é:

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (10)$$

Seguindo o mesmo procedimento descrito para 1ª ordem, obtêm-se:

$$G(i\omega) = \frac{K_p(1 - \tau_p^2\omega^2)}{(1 - \tau_p^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau_p\omega)^2} + i \frac{(-2\zeta\tau_p\omega)K_p}{(1 - \tau_p^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau_p\omega)^2}$$

e:

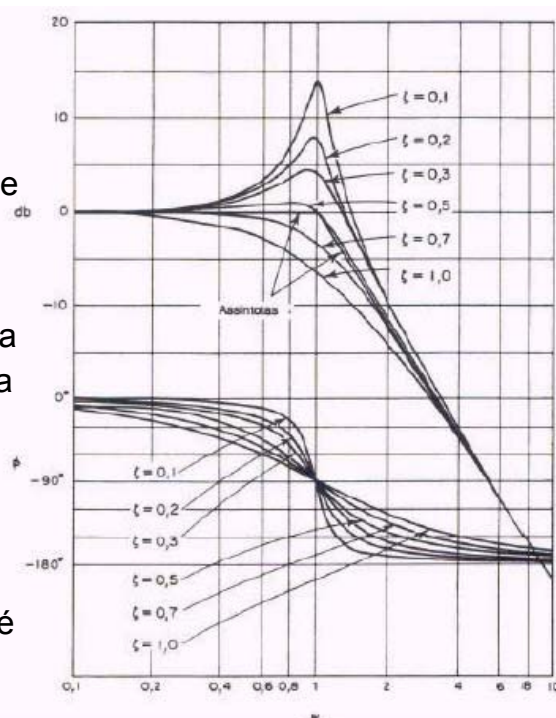
$$RA = \frac{K_p}{\sqrt{(1 - \tau_p^2\omega^2)^2 + (2\zeta\tau_p\omega)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta\tau_p\omega}{1 - \tau_p^2\omega^2}\right)$$

11

## Gráficos de Bode de um sistema de 2da ordem

- os gráficos de Bode para um sistema de segunda ordem dependem do valor do fator de amortecimento (vide figura).
- no gráfico de AR se observa uma assíntota de baixa frequência de inclinação zero e uma assíntota de alta frequência de inclinação -2.
- a frequência de pto. de interrupção se localiza em  $1/\tau$ . A transição do AR desde baixa a alta frequência depende do valor de  $\zeta$ .
- a baixas frequências o ângulo fase se aproxima a  $0^\circ$ , entretanto que a altas frequências se aproxima a  $-180^\circ$ . Na frequência pto de interrupção, o ângulo fase é de  $-90^\circ$ .



12

Substituindo  $s = j\omega$  e reordenando:

$$AR = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 \tau^2)^2 + (2\omega\tau\zeta)^2}} \quad (11a)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{-2\omega\tau\zeta}{1 - \omega^2 \tau^2} \right] \quad (11b)$$

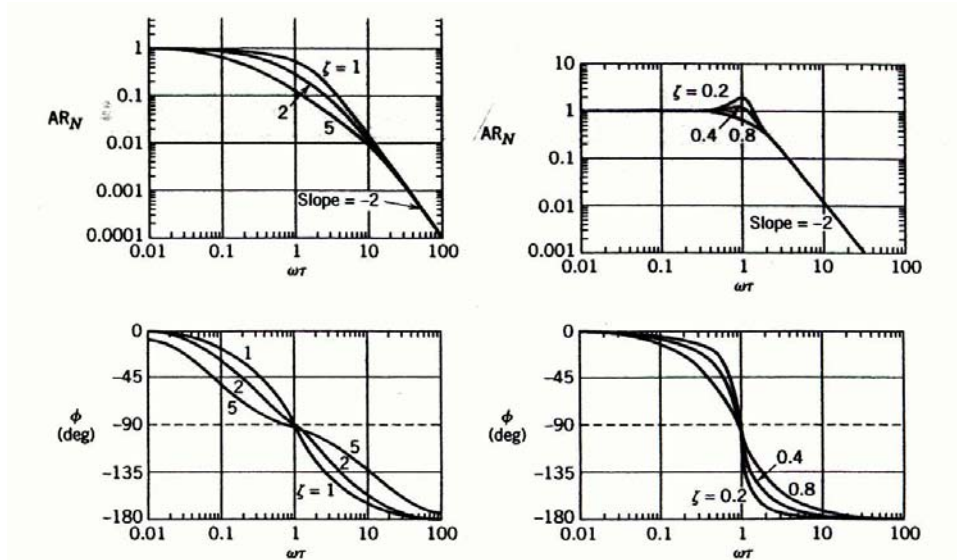


Figure 13.3 Bode diagrams for second-order processes (Seborg).

13

- Quando a frequência tende para zero ou infinito o RA e a fase apresentam o seguinte comportamento assintótico:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} RA \cong K_p$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi \cong 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} RA \cong \frac{K_p}{(\tau_p \omega)^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi \cong -180^\circ$$

14

- Observa-se em algumas curvas existe um sobreimpulso, ou valor máximo. Para calcular o valor máximo de  $RA$  deve-se determinar o mínimo de:

$$(1 - \tau_p^2 \omega^2)^2 + (2\xi \tau_p \omega)^2$$

ou seja,

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{\tau_p}$$

e utilizando este valor de frequência o  $RA$  será:

$$RA = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

15

Observe-se que, para sistemas superamortecidos

$$(\xi > \sqrt{2}/2),$$

$$\frac{RA}{K_p} = RA_N < 1, \forall \omega.$$

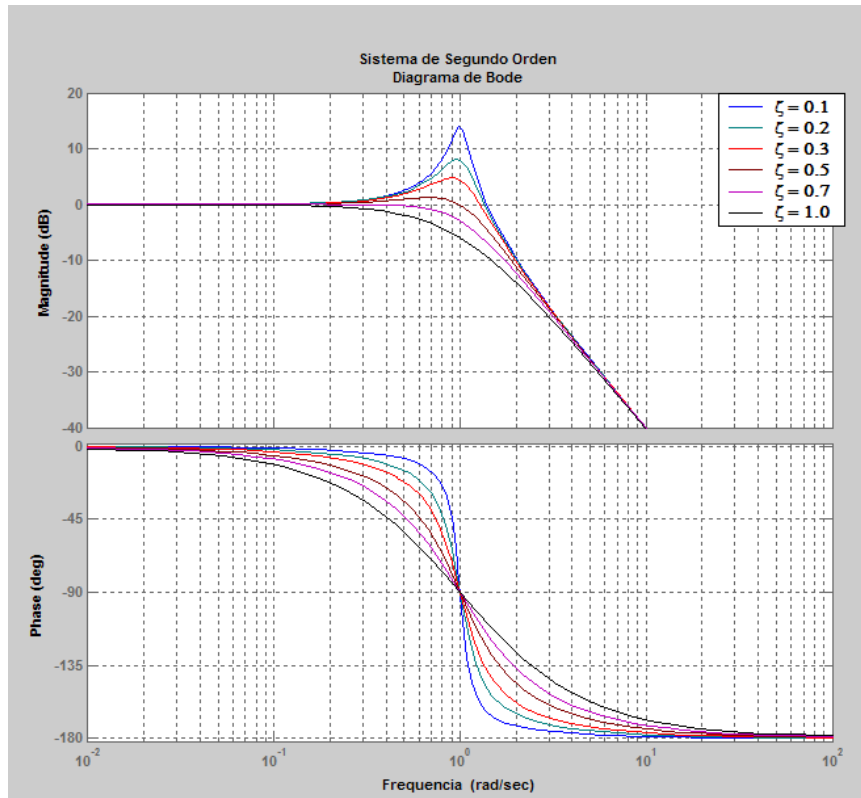
Para sistemas subamortecidos,  $0 < \xi < \sqrt{2}/2$ ,

$RA$  tem amplitude máxima em uma frequência chamada "frequência de ressonância", que foi determinada acima no cálculo do valor máximo de  $RA$ . Assim, a frequência de ressonância é:

$$\omega_r = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{\tau}$$

16





Gráficos de Bode para um sistema de segunda ordem  
( $K = 1, \tau = 1$ )

17

### Tempo morto

Suas respostas características em frequência pode ser obtida através da substituição de  $s = j\omega$ ,

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\theta} \quad (12)$$

que pode ser escrita na forma racional pela substituição da identidade de Euler,

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\theta} = \cos \omega\theta - j \sin \omega\theta \quad (13)$$

de (13)

$$AR = |G(j\omega)| = \sqrt{\cos^2 \omega\theta + \sin^2 \omega\theta} = 1 \quad (14)$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left( -\frac{\sin \omega\theta}{\cos \omega\theta} \right)$$

ou

$$\varphi = -\omega\theta \quad (15)$$

18

## Gráficos de Bode de um sistema de tempo morto puro

Na seguinte figura se observam os gráficos de Bode correspondentes a um sistema de tempo morto puro. Quando a frequência aumenta, o ângulo fase se faz mais negativo. Quanto maior é o valor do tempo morto, mais rápido diminui o ângulo fase (se torna mais rapidamente negativo).

$$G(s) = e^{-\tau_d s}$$
$$\therefore G(j\omega) = e^{-\tau_d j\omega}$$

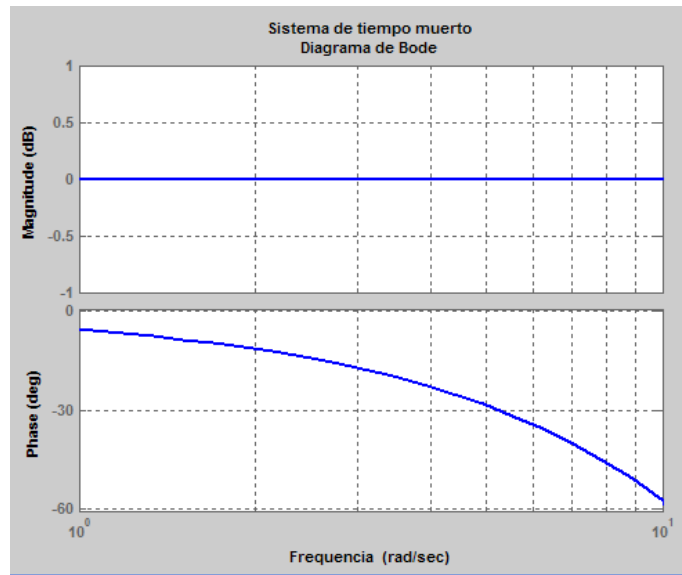


Figura - Diagramas de Bode de un sistema de tiempo muerto puro ( $t_d = 0.1$ )

## Processo Zeros

Considere-se um processo zero,

$$G(s) = K(s\tau + 1)$$

Substituindo  $s=j\omega$  da

$$G(j\omega) = K(j\omega\tau + 1)$$

Assim:

$$AR = |G(j\omega)| = K\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = +\tan^{-1}(\omega\tau)$$

**Nota:** Em geral, uma constante que multiplica (p.ex.,  $K$ ) muda o AR por um fator  $K$ , sem afetar  $\varphi$ .

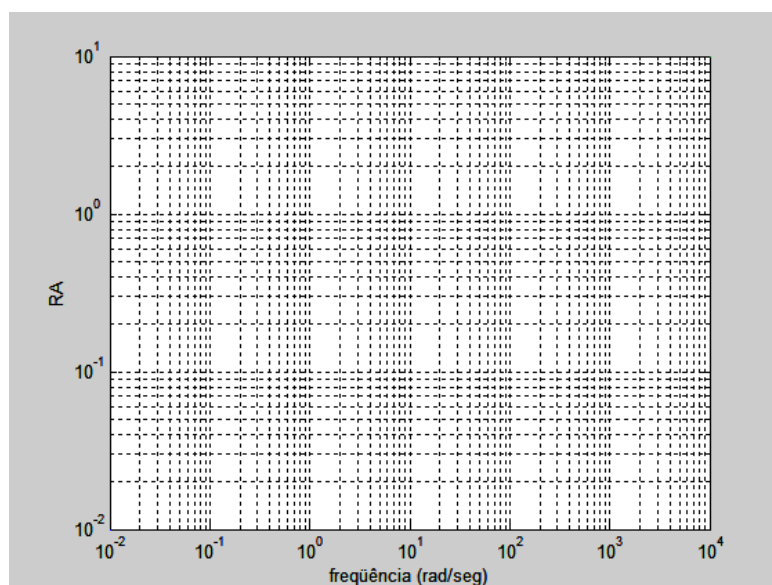
## Diagrama de Bode

- Fazendo Gráficos no Matlab

A resposta do processo a uma perturbação senoidal, com  $\omega$  variando de 0 a  $\infty$  é chamada de **resposta frequencial**, e é representada por um par de gráficos denominados de **diagramas de Bodé**, que representam em um gráfico log-log a *RA* contra a frequência, e em outro semi-log a *fase* contra a frequência como se vê a seguir:

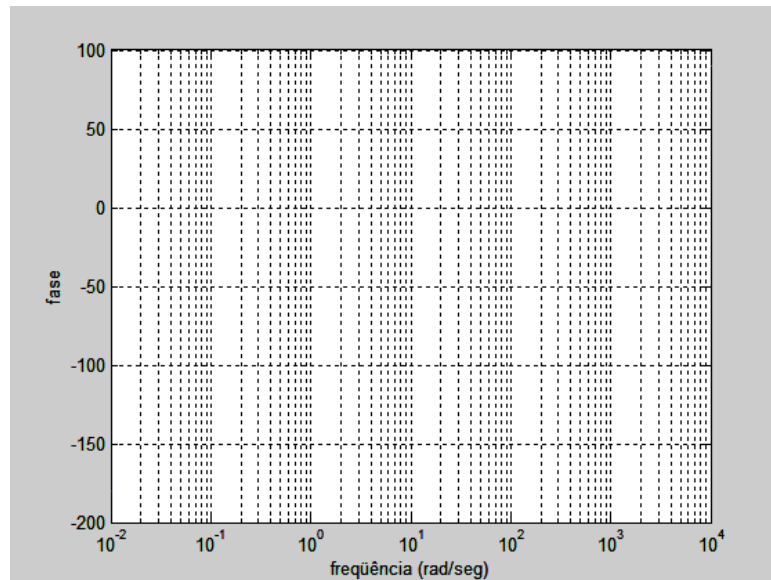
```
loglog(.01,.01,10000,10)
grid
xlabel('frequência (rad/seg)')
ylabel('RA')
```

21

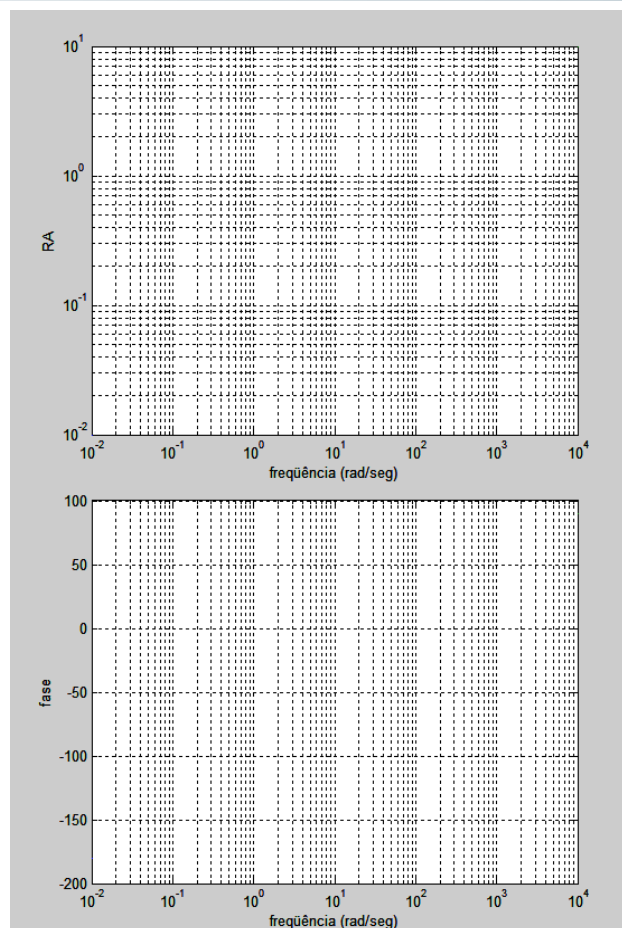


22

```
semilogx(.1,-90,1000,90)
grid
xlabel('frequência (rad/seg)')
ylabel('fase')
```



23



24

$$H(s) = 100 \frac{s+1}{(s+10)(s+100)} = 100 \frac{s+1}{s^2 + 110s + 1000}$$

PASSO 1: reescrever a função transferência em forma padrão.

Faça tanto nos termos do numerador e denominador de ordem mais baixa. O numerador é um polinômio de 1<sup>a</sup> ordem, e o denominador é a 2<sup>a</sup> ordem.

$$H(s) = \frac{100}{10 \cdot 100} \frac{\frac{s}{1} + 1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)} = 0.1 \frac{\frac{s}{1} + 1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

25

$$H(s) = \frac{100}{10 \cdot 100} \frac{\frac{s}{1} + 1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)} = 0.1 \frac{\frac{s}{1} + 1}{\left(\frac{s}{10} + 1\right)\left(\frac{s}{100} + 1\right)}$$

- PASSO 2: Separar a função de transferência em suas partes constituintes. A função de transferência tem quatro componentes:

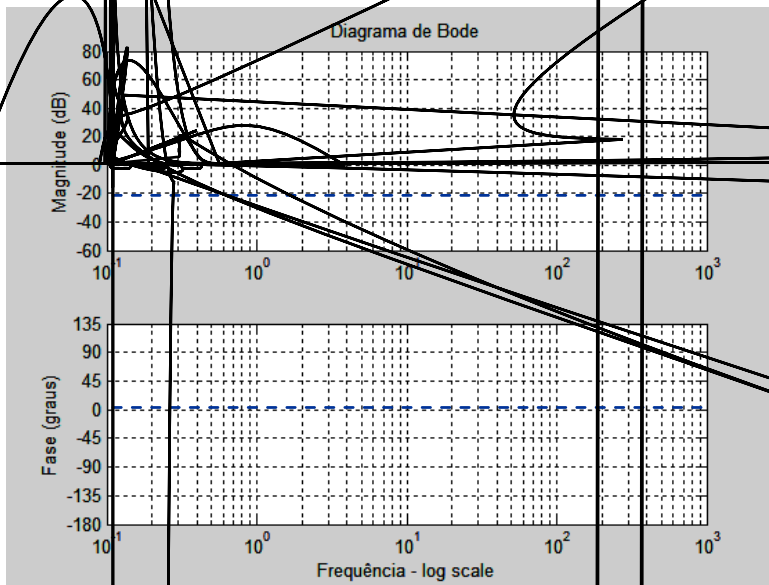
Uma constante de 0,1  
 Um pólo em  $s=-10$   
 Um pólo em  $s=-100$   
 Um zero em  $s=-1$

PASSO 3: Desenhe o BODE DIAGRAMA para cada parte. Isso é feito nos diagramas a seguir.

26

```
>> BodePaper(0.01,10000,-60,80,-180,135)
```

A constante é a linha azul  
--- (uma quantidade de  
0,1 é igual a -20 dB -). A  
fase é constante em 0  
graus

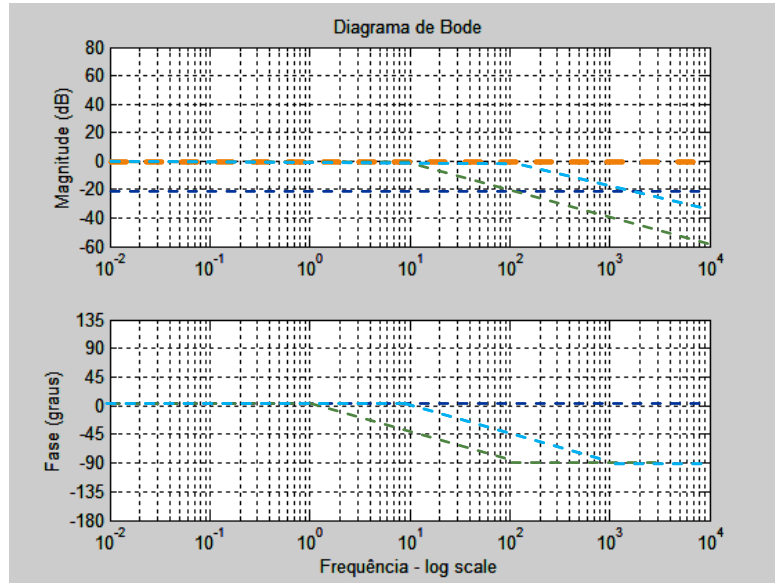


```
>> BodePaper(0.1,100,-60,80,-180,135)
```

PASSO 3: Desenhe o BODE DIAGRAMA para cada parte.

pólo em  $s = -100$

O pólo em 100 rad / s é a linha azul claro. ---  
É 0 dB até a frequência de corte, e então cai, com uma inclinação de -20 dB / década.  
A fase é de 0 graus até 1 / 10 da frequência ruptura (10 rad / seg) depois desce linearmente até -90 graus em 10 vezes a quebra de frequência (1.000 rad / seg).



29

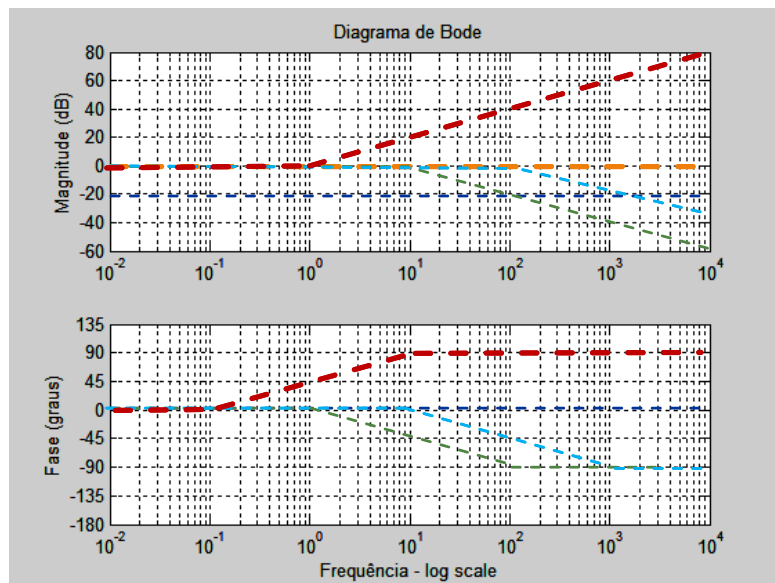
```
>> BodePaper(0.01,10000,-60,80,-180,135)
```

PASSO 3: Desenhe o BODE DIAGRAMA para cada parte.

Zero em  $s = 1$

O zero a 1 rad / s é a linha vermelha. ---  
É 0 dB até a frequência de interrupção, em seguida, sobe a 20 dB / grau.

A fase é de 0 graus até 1/10 da frequência quebra (0,1 rad / s), então aumenta linearmente a 90° em 10 vezes a frequência de ruptura (10 rad / seg).



30

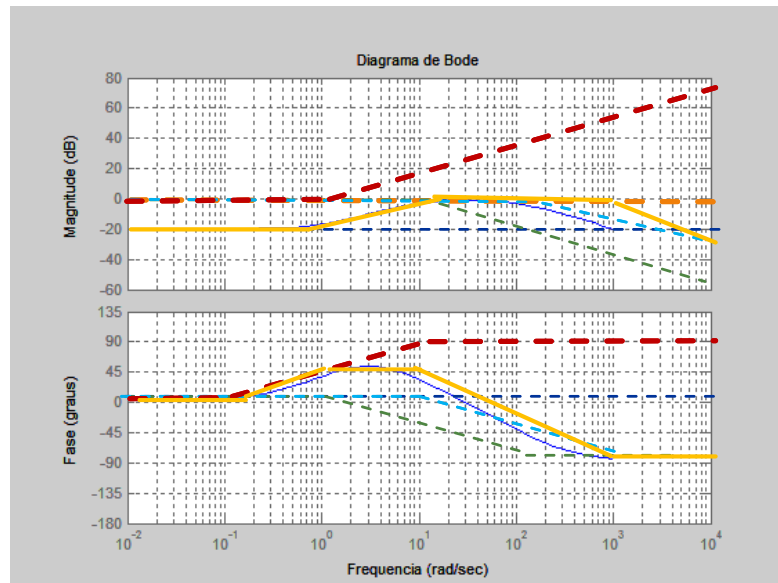
```
>> BodePaper(0.01,10000,-60,80,-180,135)
```

PASSO 4: Desenhe o Diagrama BODE GERAL somando os resultados anteriores.

O resultado assintótico é a Linha-amarela, uma Resposta Exata é a Linha azul contínua (por ex., obtida no Matlab).

no Matlab seria:

```
num= 100*[1 1]
den =[1 110 1000];
sys = tf(num,den);
bode(sys)
```



31

## Características de resposta de frequência de Controladores Feedback

**Controlador Proporcional.** Considere um controlador proporcional com ganho positivo

$$G_c(s) = K_c \quad (16)$$

neste caso  $|G_c(j\omega)| = K_c$ , o qual é independente de  $\omega$ . Assim,

$$AR_c = K_c \quad (17)$$

e

$$\varphi_c = 0^\circ \quad (18)$$

32



**Controlador Proporcional-Integral.** o controlador proporcional integral (PI) tem a função de transferência ,

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) = K_c \left( \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) \quad (19)$$

Substitua  $s=j\omega$ :

$$G_c(j\omega) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I j\omega} \right) = K_c \left( \frac{j\omega\tau_I + 1}{j\omega\tau_I} \right) = K_c \left( 1 - \frac{1}{\tau_I \omega} j \right)$$

Assim, a razão de amplitude e ângulo de fase são:

$$AR_c = |G_c(j\omega)| = K_c \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau_I)^2}} = K_c \frac{\sqrt{(\omega\tau_I)^2 + 1}}{\omega\tau_I} \quad (20)$$

$$\varphi_c = \angle G_c(j\omega) = \tan^{-1}(-1/\omega\tau_I) = \tan^{-1}(\omega\tau_I) - 90^\circ \quad (21)$$

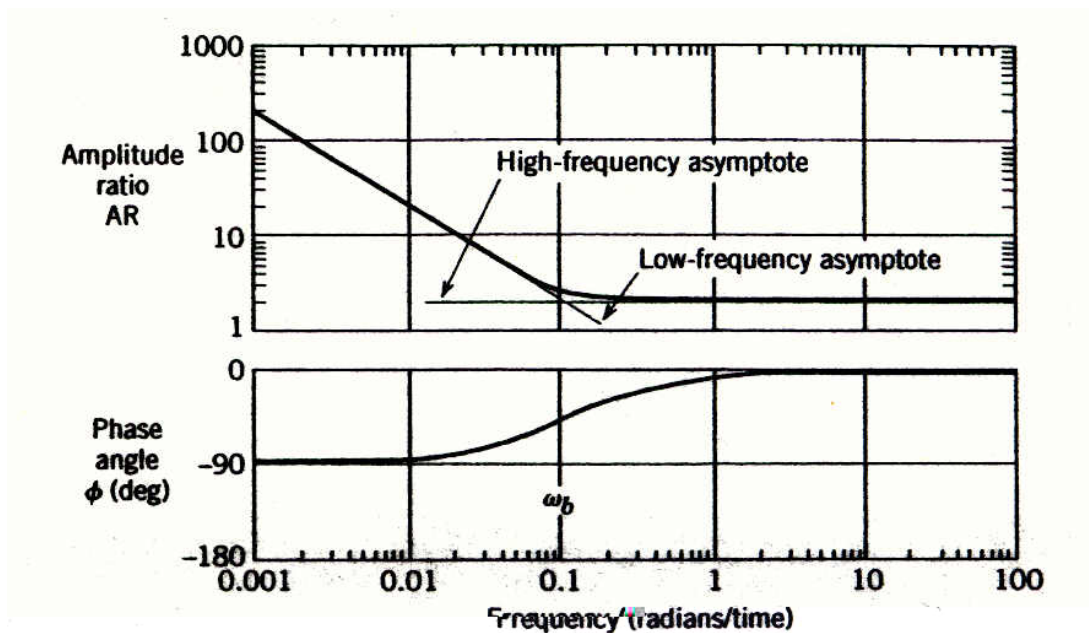


Figure 13.9 Bode plot of a PI controller,  $G_c(s) = 2 \left( \frac{10s + 1}{10s} \right)$

**Controlador proporcional derivativo Ideal.** Para o controlador proporcional derivativo (PD):

$$G_c(s) = K_c(1 + \tau_D s) \quad (22)$$

As características de resposta de frequência são semelhantes às de um zero LHP:

$$AR_c = K_c \sqrt{(\omega \tau_D)^2 + 1} \quad (23)$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega \tau_D) \quad (24)$$

**Controlador proporcional derivativo com Filtro.** O controlador PD mais frequentemente realizado tem a função de transferência:

$$G_c(s) = K_c \left( \frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right) \quad (25)$$

35

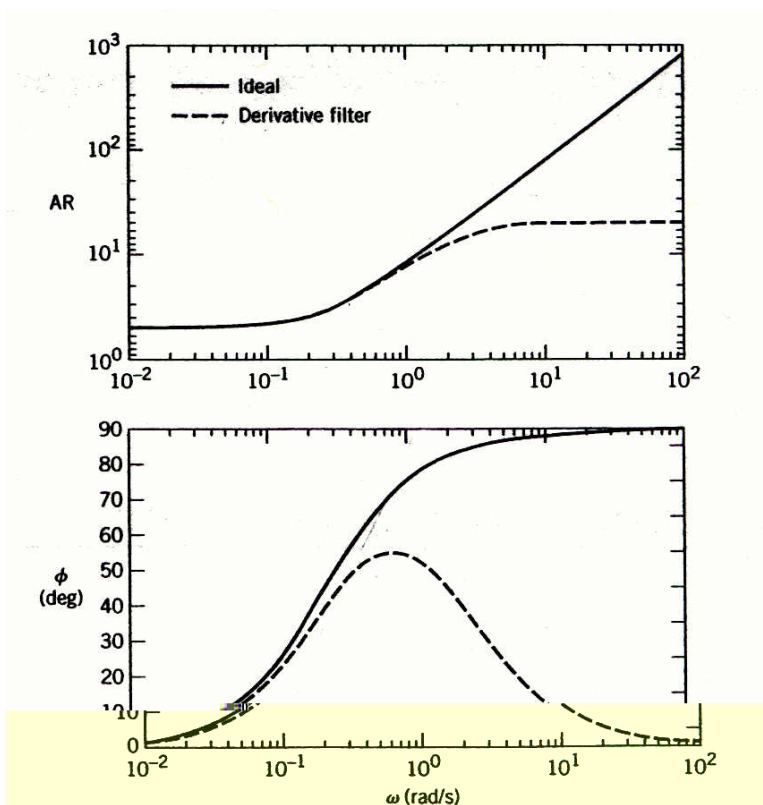


Figure 13.10 Bode plots of an ideal PD controller and a PD controller with derivative filter.

Idea:

With Derivative Filter:

$$G_c(s) = 2 \left( \frac{4s + 1}{0.4s + 1} \right)$$

36

# Controlador PID

**Controlador PID paralelo.**

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

**Controlador PID serie**

$$G_c(s) = K_c \left( \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) (\tau_D s + 1)$$

**Controlador PID serie com filtro**

$$G_c(s) = K_c \left( \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right) \left( \frac{\tau_D s + 1}{\alpha \tau_D s + 1} \right)$$

37

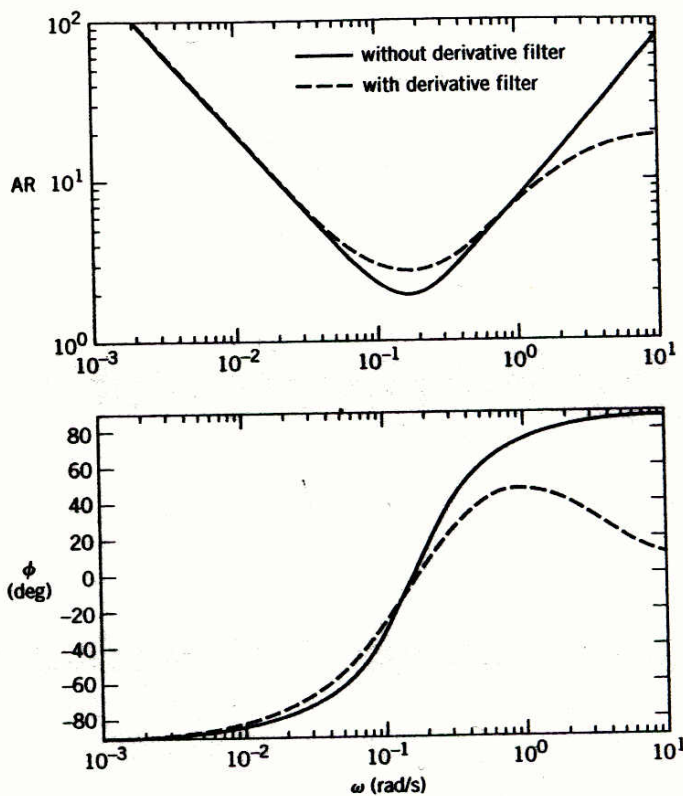


Figure 13.11 Bode plots of ideal parallel PID controller and series PID controller with derivative filter ( $\alpha = 1$ ).

Idea parallel:

Series with Derivative Filter:

$$G_c(s) = 2 \left( 1 + \frac{1}{10s} + 4s \right)$$

$$G_c(s) = 2 \left( \frac{10s + 1}{10s} \right) \left( \frac{4s + 1}{0.4s + 1} \right)$$

38

**Tabla.1 Relación de Amplitudes y Fase para Sistemas**

Sistema	$G(s)$	$AR$	$\theta$
Ganancia Pura	$K$	1	0
Atraso de Primer Orden	$\frac{K}{\tau s + 1}$	$\frac{K}{\sqrt{1 + w^2 \tau^2}}$	$\tan^{-1}(-w\tau)$
Atraso de Segundo Orden	$\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$	$\frac{K}{\sqrt{(1 - w^2 \tau^2)^2 + (2\tau\zeta w)^2}}$	$-\tan\left(\frac{2\tau\zeta w}{1 - w^2 \tau^2}\right)$
Adelanto de Primer Orden	$K(1 + \tau s)$	$K\sqrt{1 + w^2 \tau^2}$	$\theta = \tan(w\tau)$
Sistema Tiempo Muerto	$e^{-t_o s}$	1	$\theta = -t_o w$
Sistema Integrador	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{w}$	$\theta = -\frac{\pi}{2}$
Controlador PI	$K_c \left( \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} \right)$	$K_c \sqrt{1 + \frac{1}{(\tau_I w)^2}}$	$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{w \tau_I}\right) < 0$
Controlador PID	$K_c \left( \frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s} \right)$	$K_c \sqrt{1 + \left( \tau_D w - \frac{1}{\tau_I w} \right)^2}$	$\tan^{-1}\left( \tau_D w - \frac{1}{w \tau_I} \right)$

Mais informação nos livros de:

Smith & Corripio: Capitulo 8 - Lugar das raízes e técnicas de respostas de frequência.

Seborg : Capitulo 14 - Frequency Response Analysis

<http://lpsa.swarthmore.edu/Bode/BodeFiles.html1>