Projeto de Controladores No Domínio Da Freqüência

Newton Maruyama

Compensação por avanço de fase

- Função de Transferência:

$$H(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1)$$

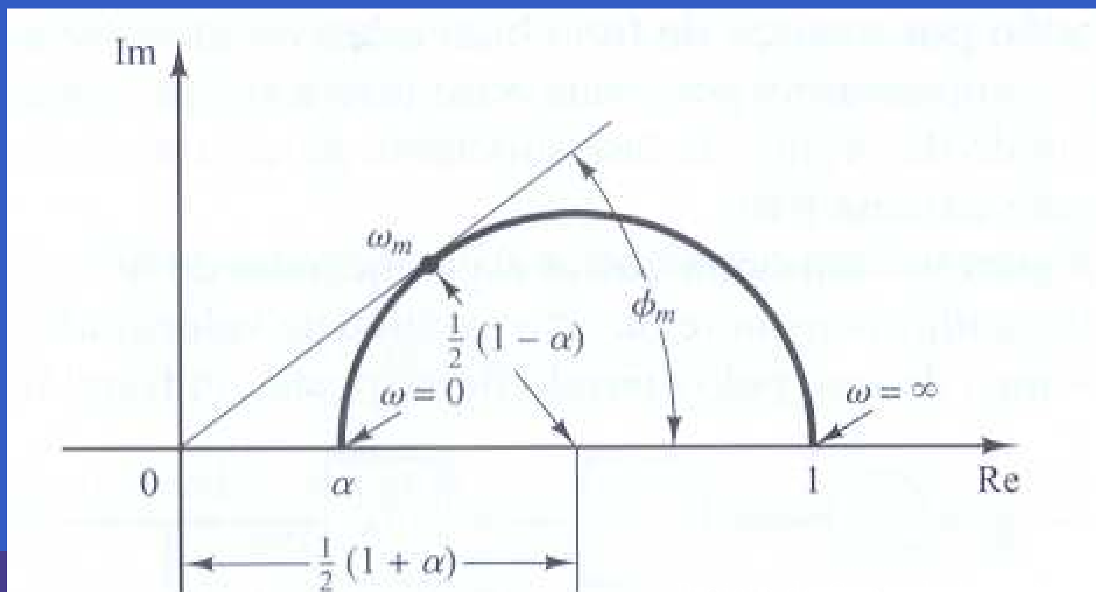
- zero: $s = -\frac{1}{T}$
- pólo: $s = -\frac{1}{\alpha T}$
- $0 < \alpha < 1$ logo o zero sempre se encontra à direita do pólo

Gráfico polar

- A figura ilustra o gráfico polar de:

$$H(j\omega) = K_c \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \quad (0 < \alpha < 1) \qquad (2)$$

com $K_c = 1$



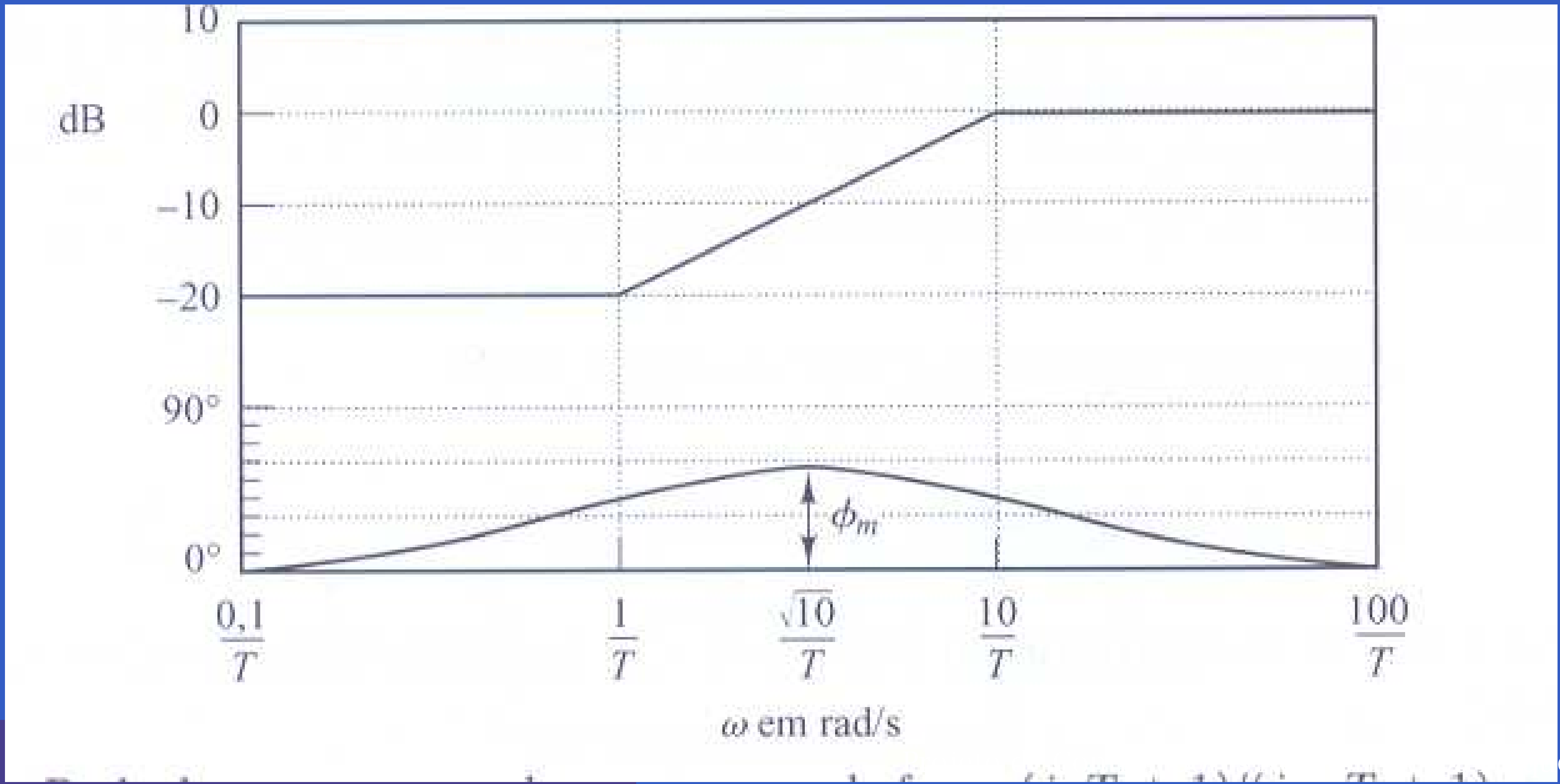
Maior ângulo de avanço ϕ_m

- Para um dado valor de α existe o maior valor da fase de $H(j\omega)$ que ocorre na freqüência ω_m:

$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{3}$$

Diagrama de Bode

- A figura ilustra o diagrama de Bode para $K_c = 1$ e $\alpha = 0.1$
- Freqüências de canto $\omega = \frac{1}{T}$ e $\omega = \frac{1}{\alpha T}$



Freqüência ω_m

- ω_m é a média geométrica das frqüências de canto:

$$\log \omega_m = \frac{1}{2}\left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T}\right) \tag{4}$$

Logo:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T} \tag{5}$$

Um exemplo

- Suponha um sistema com a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)} \tag{6}$$

- Deseja-se projetar um controlador $G_c(s)$ tal que:
  - A constante de erro de velocidade estático $K_v = 20seg^{-1}$
  - Margem de fase seja pelo menos $\gamma = 50^o$
  - Margem de ganho $K_g > 10dB$

Passo 1 - Ajuste de constante estático

- Considere:

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \quad (0<\alpha<1) \quad (7)$$

- Defina $K = K_c\alpha$
- Logo:

$$G_c(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} \quad (8)$$

Passo 1 - continuação ...

- A função de transferência do sistema compensado pode ser expresso como:

$$G_c(s)G(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}G(s) \tag{9}$$
$$= \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}KG(s) \tag{10}$$
$$= \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}G_1(s) \tag{11}$$

onde $G_1(s) = KG(s)$

Passo 1: continuação ...

- No sistema em questão:

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{4K}{s(s+2)} \tag{12}$$

onde $K = K_c\alpha$

- Projete K para $K_v = 20seg^{-1}$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim s\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}G_1(s) \tag{13}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s4K}{s(s+2)} = 2K = 20 \Rightarrow K = 10 \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

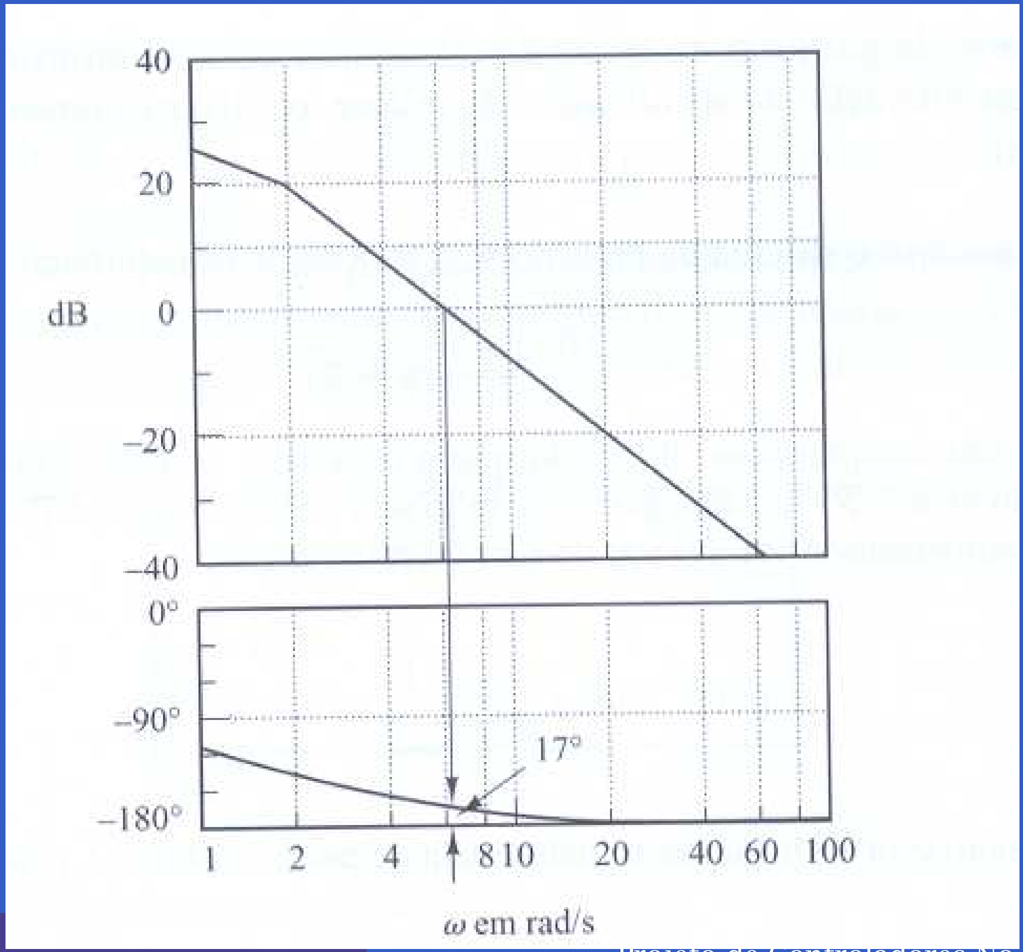
Passo 2 - Margem de Fase do sistema $G_1(s)$

- Diagrama de Bode

$$G_1(j\omega) = \frac{40}{j\omega + 2} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega + 1)} \tag{16}$$

Passo 2: continuação ...

- Da figura obtemos $\gamma = 17^o$ e $K_g = \infty$



Passo 3 - Ângulo ϕ_m

- A especificação pede que o sistema final tenha pelo menos $\gamma = 50^o$
- Ou seja, é necessário acrescentar 33^o
- Este ângulo adicional vai ser provido pelo máximo ângulo de avanço do controlador G_c, ϕ_m
- Ou seja, faremos com que ω_m coincida com a freqüência de crossover ω_g
- Entretanto a freqüência de crossover final não permanece no mesmo local devido ao módulo de $G_c(s)$. Dessa forma, introduz-se aqui um fator de correção de 5^o (Porque este valor ?)
- $\phi_m = 33^o + 5^o$

Passo 4: Cálculo de α

- Considerando $\phi_m = 38^o$:

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow \alpha = 0.24 \qquad (17)$$

- Devemos determinar a freqüência ω_m onde o módulo de $\left| G_1(j\omega) \right| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$db

Passo 4: continuação ...

- Porque este valor ?

$$|G'_c(j\omega)| = \left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega\alpha T} \right|_{\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}} \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow 20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{dB} \tag{19}$$

- A frqüência ω_m deve ser tal que

$$|G'_c(j\omega)G_1(j\omega)| = 0\text{dB} \tag{20}$$

ou seja, $\omega_m = \omega_g$

Passo 4: continuação ...

- $$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.24}} = \frac{1}{0.49} \tag{21}$$
  $$= 20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 6.2\text{dB} \tag{22}$$
- No gráfico $|G_1(j\omega)| = -6.2\text{dB} \Rightarrow \omega_g = 9rad/seg$
- Ou seja,

$$|G_1(j\omega_g)G_c'(j\omega_g)| = -6\text{dB} + 6.2\text{dB} = 0\text{dB} \tag{23}$$

Passo 5: Determinar o pólo e zero

- A nova freqüência de crossover $\omega_g = \omega_m = 1/\sqrt{\alpha}T = 9rad/seg$
- Ou seja:
  - Pólo:
$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_g = 4.41rad/seg \tag{24}$$
  - Zero:
$$\frac{1}{\alpha T} = 18.4rad/seg \tag{25}$$

Passo 6: Calcular K_c

- $$H(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = K_c \alpha \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1} \tag{26}$$

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{10}{0.24} = 41.7 \tag{27}$$

- O controlador pode ser escrito como:

$$G_c(s) = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = 10 \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1} \tag{28}$$

Passo 7: Verificação

- Para efeitos do gráfico:

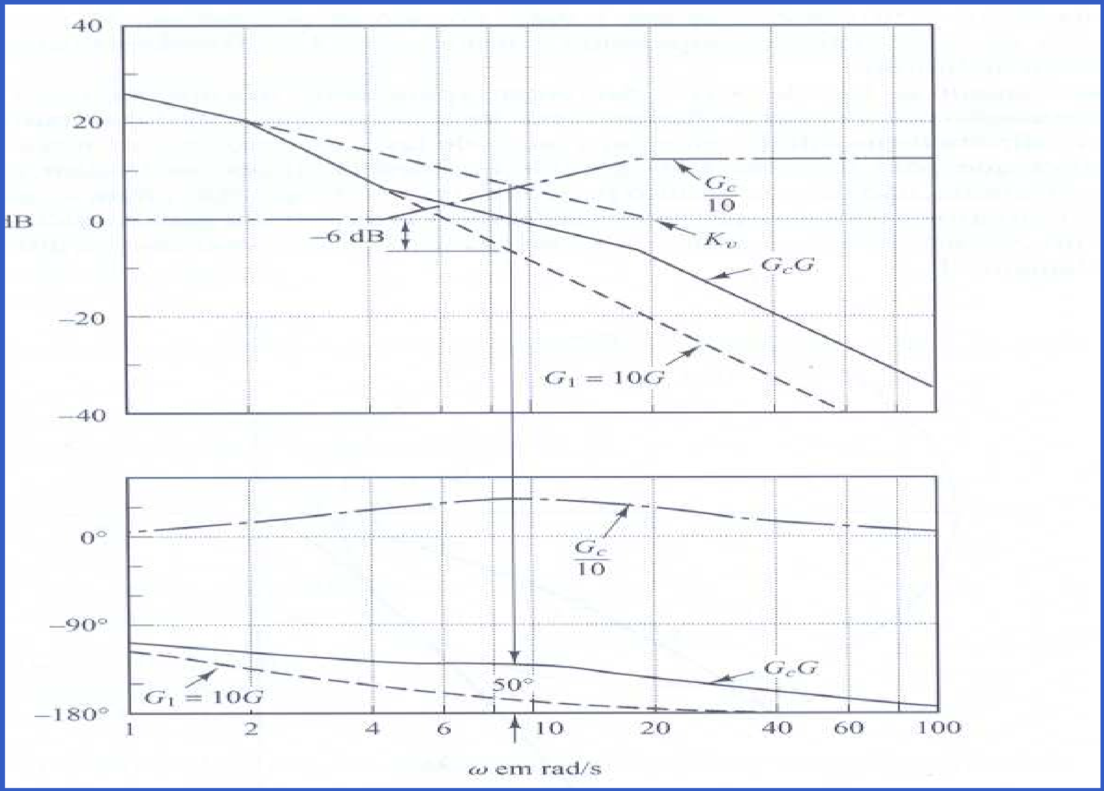
$$\frac{G_c(s)}{K}G_1(s) = \frac{G_c(s)}{10}10G(s) = G_c(s)G(s) \qquad (29)$$

-

$$G_c(s)G(s) = 41.7\frac{s+4.41}{s+18.4}\frac{4}{s(s+2)} \qquad (30)$$

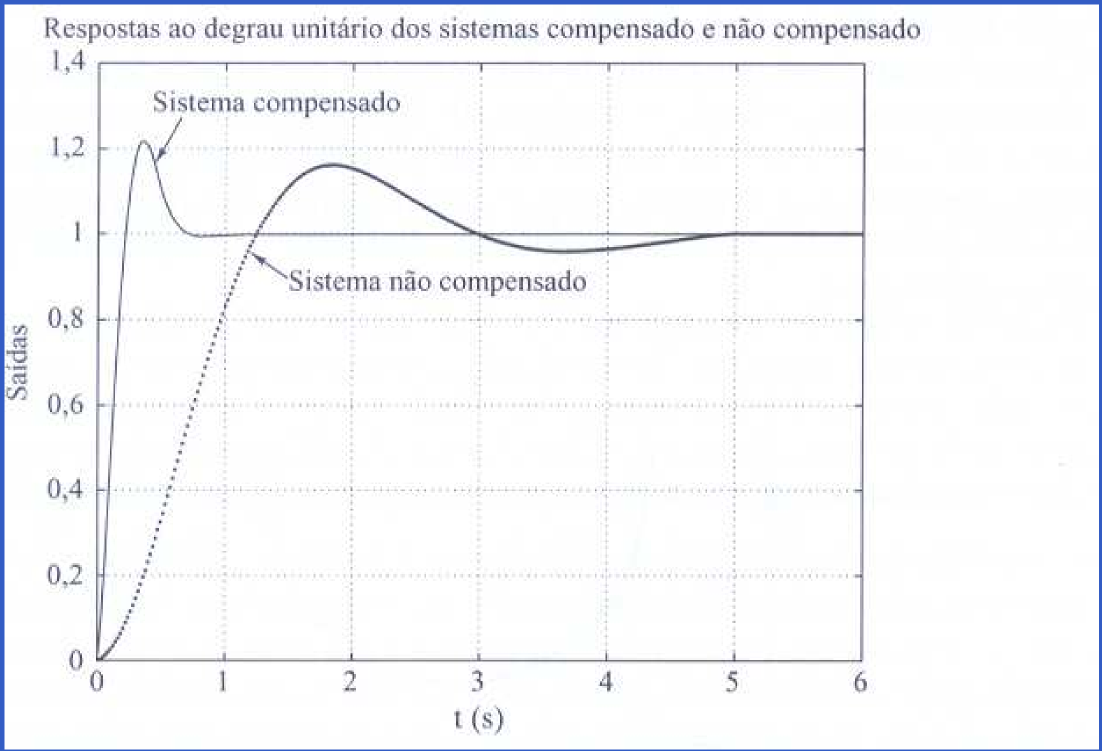
Passo 7: continuação ...

- ω_g mudou de $6.3 rad/seg$ para $9 rad/seg$
- $\omega_g \uparrow \Rightarrow \omega_c \uparrow \Rightarrow$ Sistema mais rápido



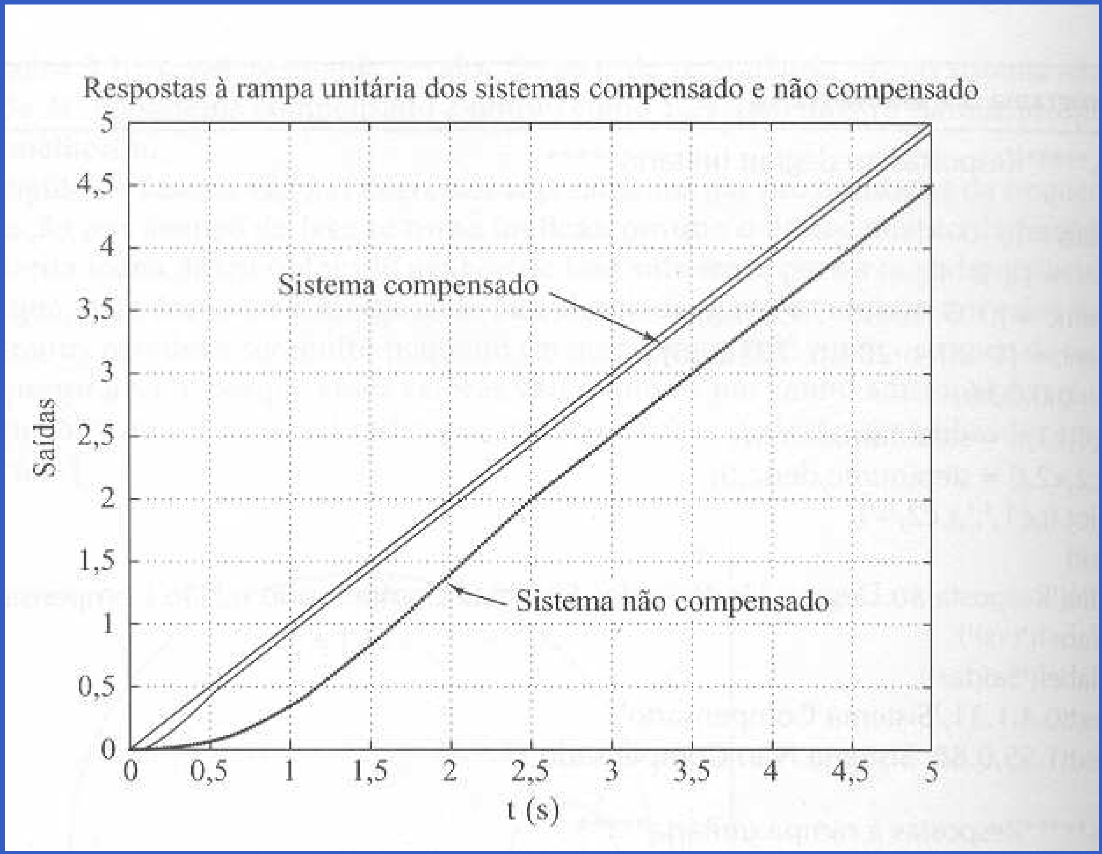
Passo 7: continuação ...

- Resposta a degrau
  - Resposta mais rápida porém mais oscilatória



Passo 7: continuação ...

- Resposta a rampa



Compensação por atraso de fase

- Função de transferência:

$$G_c(s) = K_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts = 1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad \beta > 1 \qquad (31)$$

como $\beta > 1$ o pólo esté sempre a direita do zero

- Gráfico polar

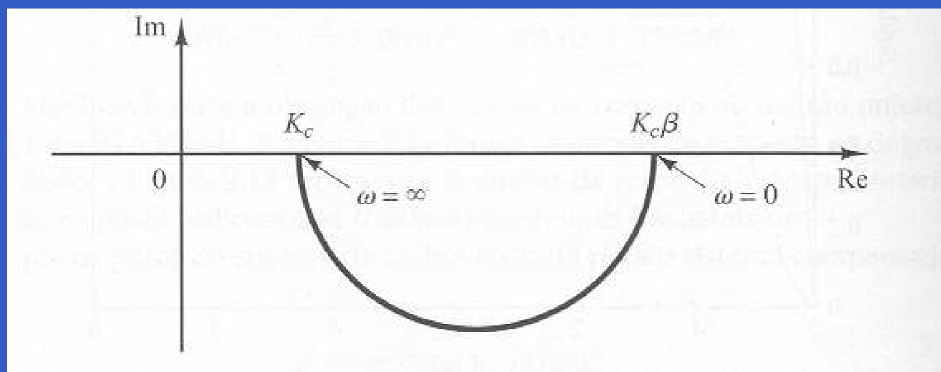
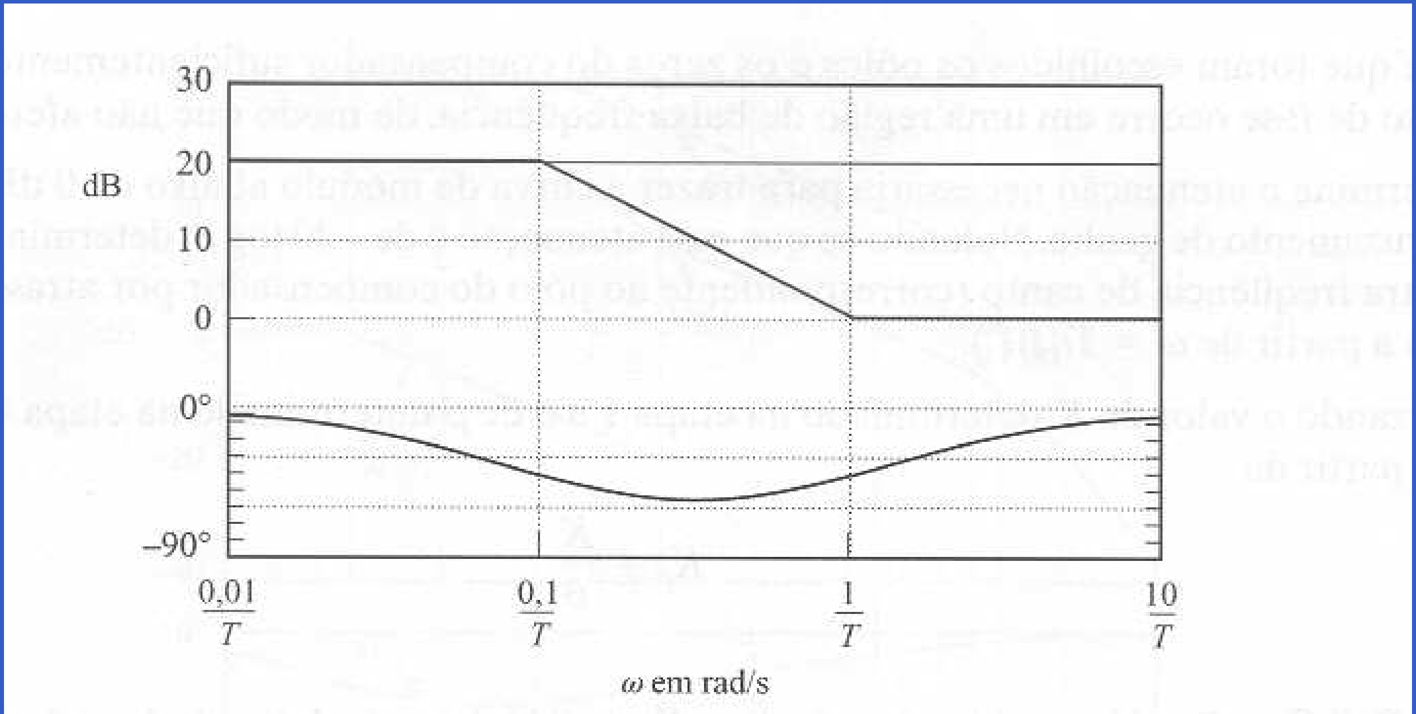


Diagrama de Bode

- No controlador por avanço de fase utilizamos como ponto de crosssover ω_g o ponto de máximo avanço fase
- No controlador por atraso de fase utilizamos como ponto de crossover ω_g um ponto onde o módulo do controlador $G_c(s)$ seja mínimo e a fase seja praticamente zero

Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode para $K_c = 1.0$ e $\beta = 10$



Um exemplo

- Seja o seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)} \tag{32}$$

- Projetar um controlador por atraso de fase tal que:
  - $K_v = 5seg^{-1}$
  - Margem de fase $\gamma \geq 40^o$
  - margem de granho $K_g \geq 10\text{dB}$

Passo 1: Ajustar o ganho K

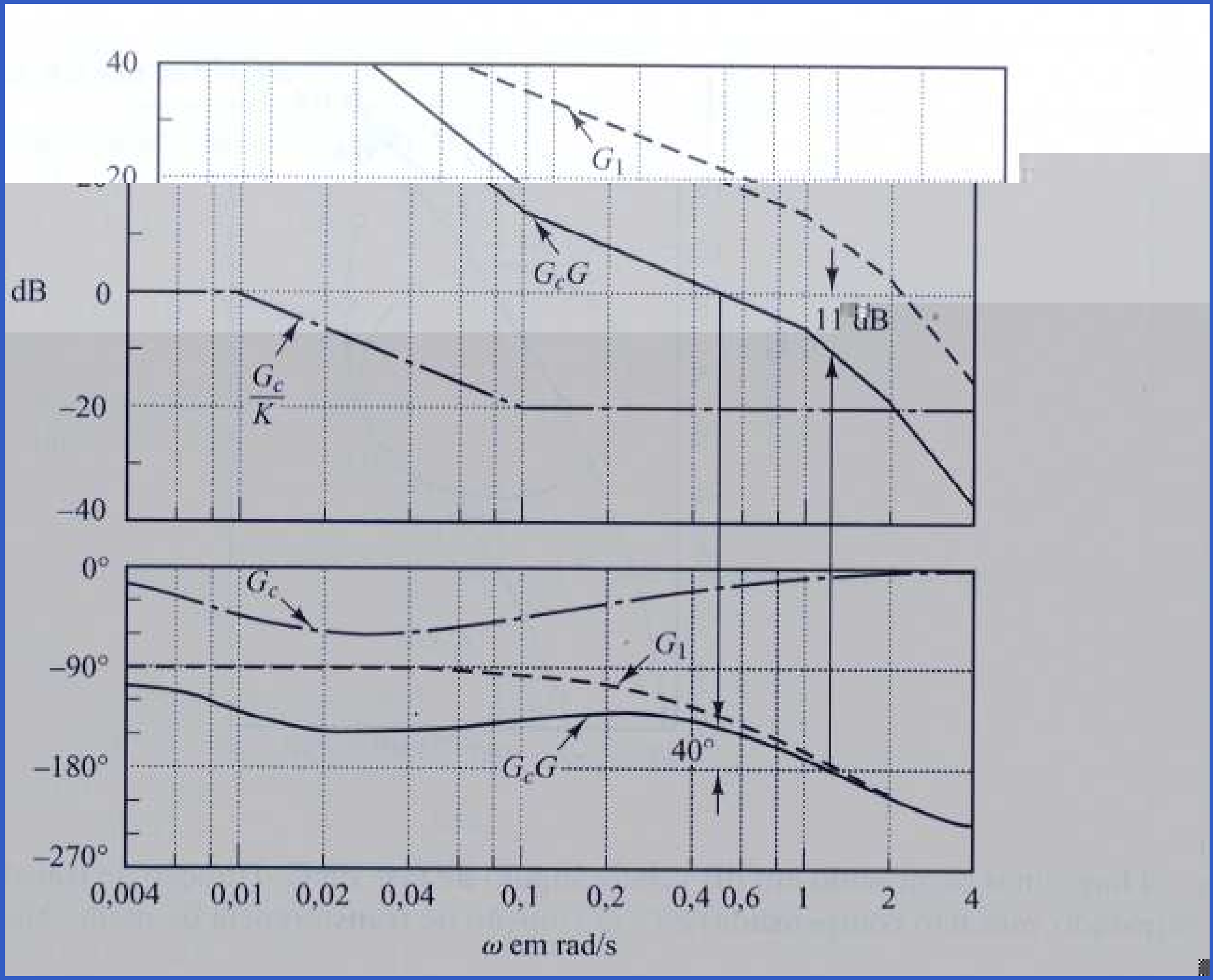
- $$K_c\beta = K \quad (33)$$
  $$G_1(s) = KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)} \quad (34)$$

- $$K_v = 5 \quad (35)$$
  $$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}G_1(s) \quad (36)$$
  $$= \lim_{s\to 0} \frac{sK}{s(s+1)(0.5s+1)} \Rightarrow K = 5 \quad (37)$$

Passo 2: Verificação da margem de fase e de ganho

- $$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega w+1)} \qquad (38)$$
- $\gamma = -20^o$ e $K_g = 11\text{dB}$
- Sistema instável

Passo 2: continuação ...



Passo 3: Escolher ω_g

- Desejamos $\gamma \geq 40^o$
- Vamos tentar definir qual seria a fase do sistema ϕ num ponto onde $\gamma = 40^o$
- Lembre-se que aqui desejamos utilizar a região do controlador $G_c(s)$ que tem ganho mínimo. Deve-se atentar ao fato que a fase do controlador no ponto escolhido nunca será zero o que pode provocar um deslocamento do ponto de crossover ω_g

Passo 2: continuação ...

- Receita de bolo: acrescentar de 5^o a 12^o como fator de compensação
-

$$\phi = -180^o + \gamma + \text{fator de compensação} = 12^o = -128^o \quad (39)$$

- No gráfico temos, $\omega_g = 0.5 rad/seg$ para $\phi = -128^o$

Passo 3: Escolher as freq. de canto

- Para evitar os efeitos do atraso de fase o pólo e o zero devem estar localizados bem abaixo de ω_g
- A freqüência de canto $\omega = 1/T$ é escolhida uma oitava ou uma década menor (Obs: quanto menor ω mais lento o sistema)
- Escolhamos: $\omega = 1/T = 0.1 rad/seg$

Passo 4: Determinar o ganho β

- Determinar a atenuação necessária para que $\omega_g = 0.5rad/seg$
- No gráfico, obtemos atenuação de -20dB
- Da equação da assíntota de alta freqüência, obtemos:

$$20\log\frac{1}{\beta} = -20 \Rightarrow \beta = 10 \tag{40}$$

- Obtido o valor do ganho β, podemos obter a outra freqüência de canto:

$$\omega = \frac{1}{\beta T} = 0.01rad/seg \tag{41}$$

passo 5: Determinação do ganho K

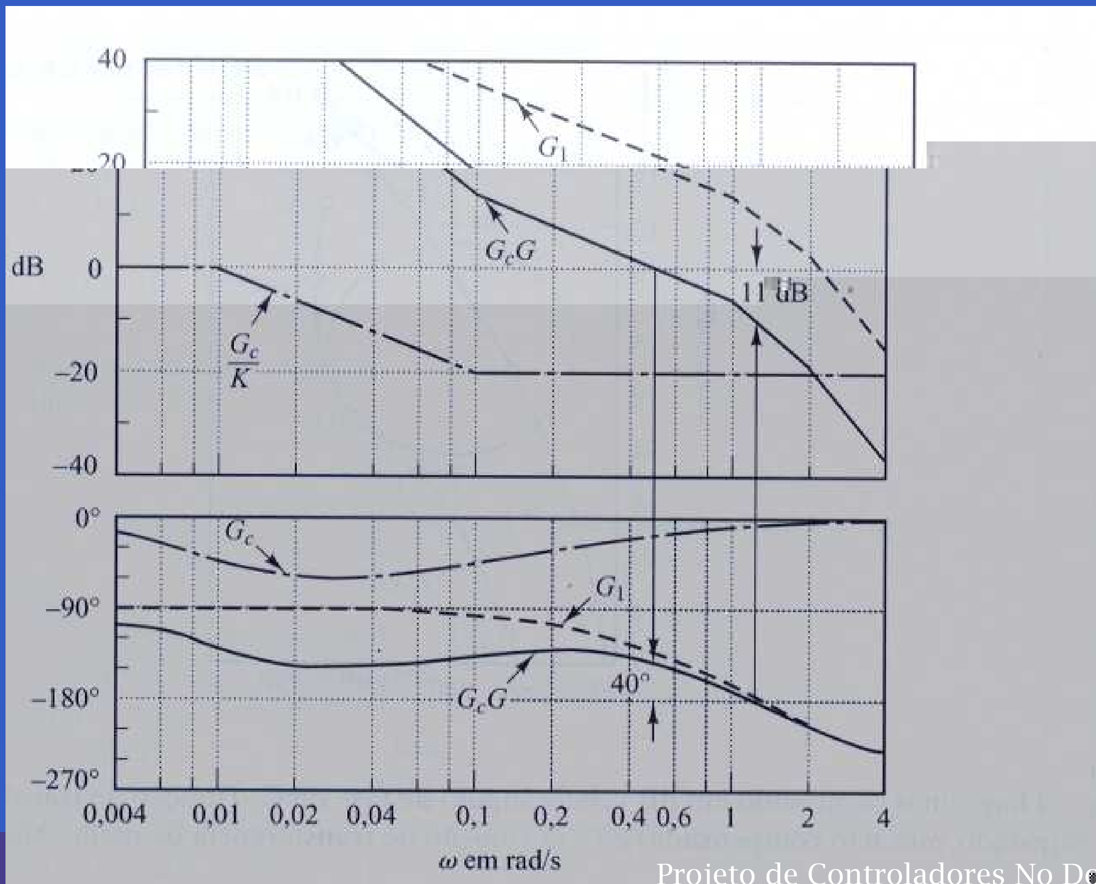
- $$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{10} = 0.5 \tag{42}$$

- Desta forma o sistema se torna,

$$G_c(s)G(s) = \frac{5(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0.5s+1)} \tag{43}$$

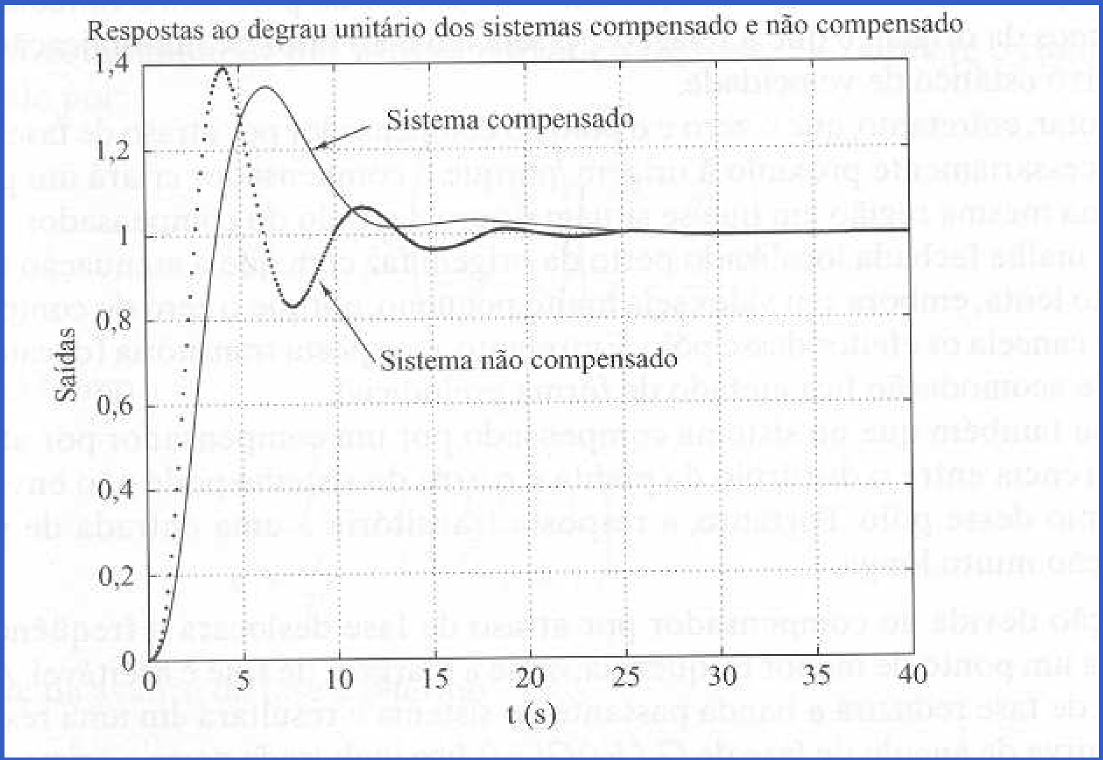
Passo 6: Verificação

- No gráfico, obtemos $\gamma = 40^o$ e $K_g = 11$dB além de $K_v = 5seg^{-1}$



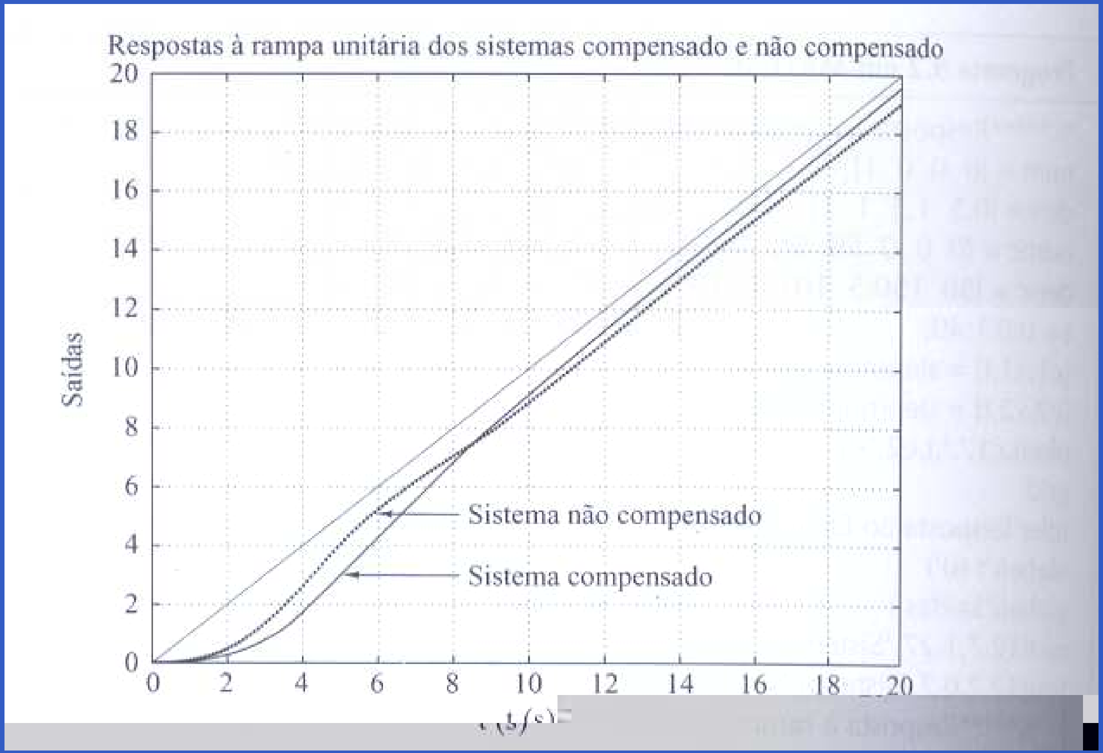
Passo 6: continuação

- Resposta a degrau:



Passo 6: continuação

- Resposta a rampa



Controlador por atraso-avanço

- Função de transferência

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad \gamma, \beta > 1 \qquad (44)$$

continuação ...

- Avanço de fase:

$$\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T_1 s+1}{\frac{T_1}{\gamma}s+1}\right) \quad \gamma > 1 \tag{45}$$

- Atraso de fase:

$$\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} = \beta\left(\frac{T_2 s+1}{\beta T_2 s+1}\right) \quad \gamma > 1 \tag{46}$$

- Frequentemente utiliza-se $\gamma = \beta$

Gráfico Polar

- Gráfico polar para $K_c = 1$ e $\gamma = \beta$
- Atraso $0 < \omega < \omega_1$, Avanço $\omega_1 < \omega < \infty$
- A freqüência ω_1 é a freqüência onde a fase é nula
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

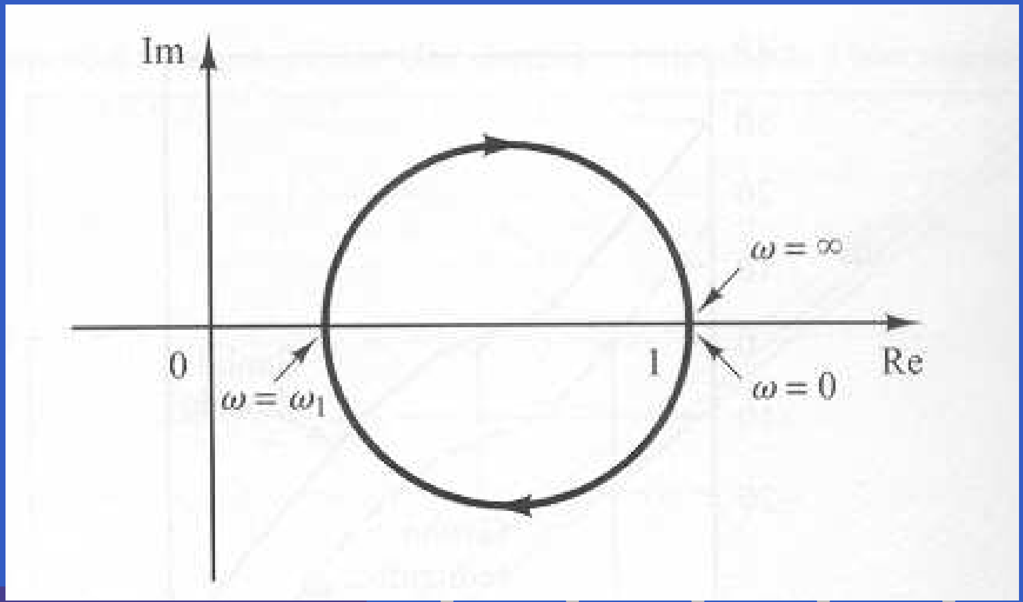
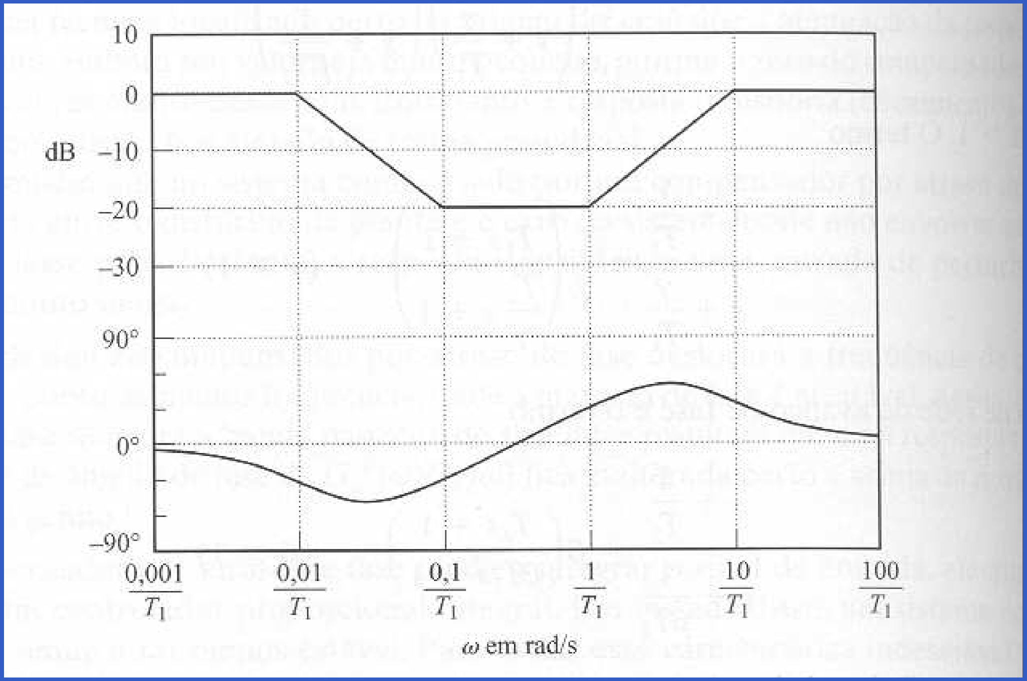


Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode para $K_c = 1$, $\gamma = \beta = 10$ e $T_2 = 10T_1$



Um exemplo

- Seja o seguinte sistema em malha aberta

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \tag{47}$$

- Projete um compensador tal que
  - $K_v = 10seg^{-1}$
  - $\gamma = 50^o$
  - $K_g \geq 10\text{dB}$

Solução

- Constante $K_c = 1$
- Avanço de fase:

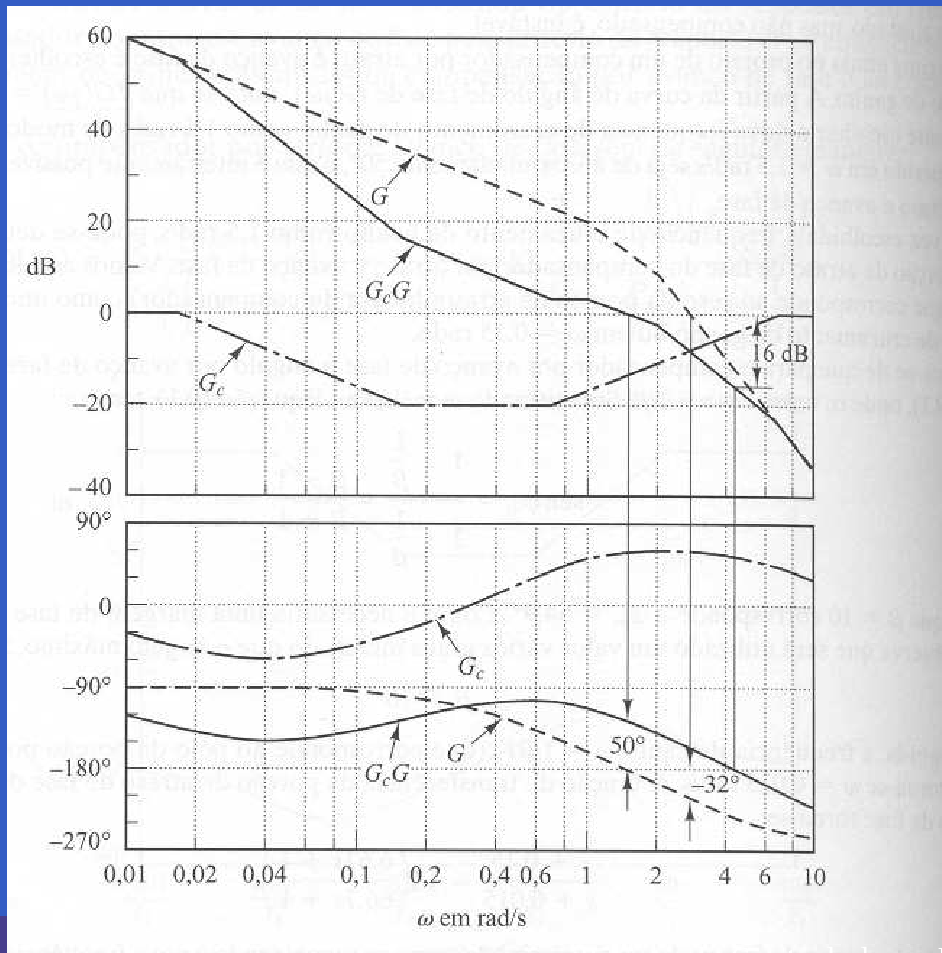
$$\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}} = \frac{s+0.7}{s+7} = \frac{1}{10}\frac{1.43s+1}{0.143s+1} \tag{48}$$

- Atraso de fase:

$$\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} = \frac{s+0.15}{s+0.015} = 10\frac{6.67s+1}{66.7s+1} \tag{49}$$

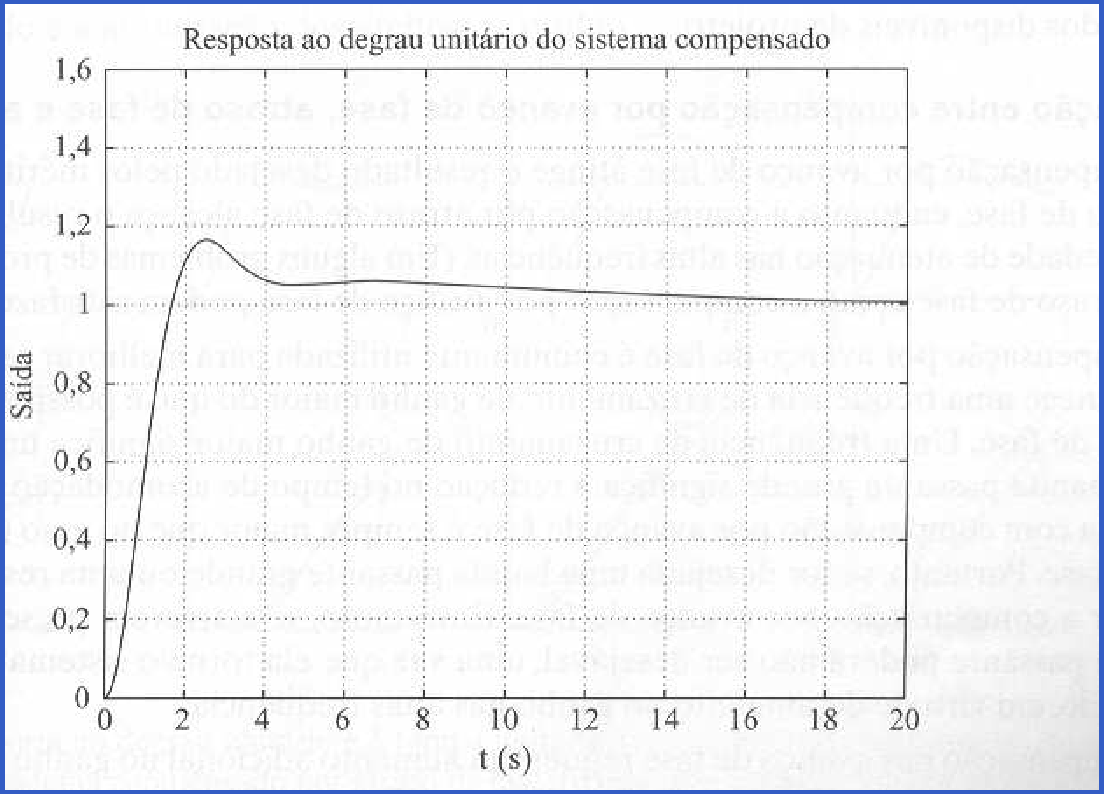
Verificação

- Diagrama de Bode: $\gamma = 50^o$ e $K_g = 16$dB



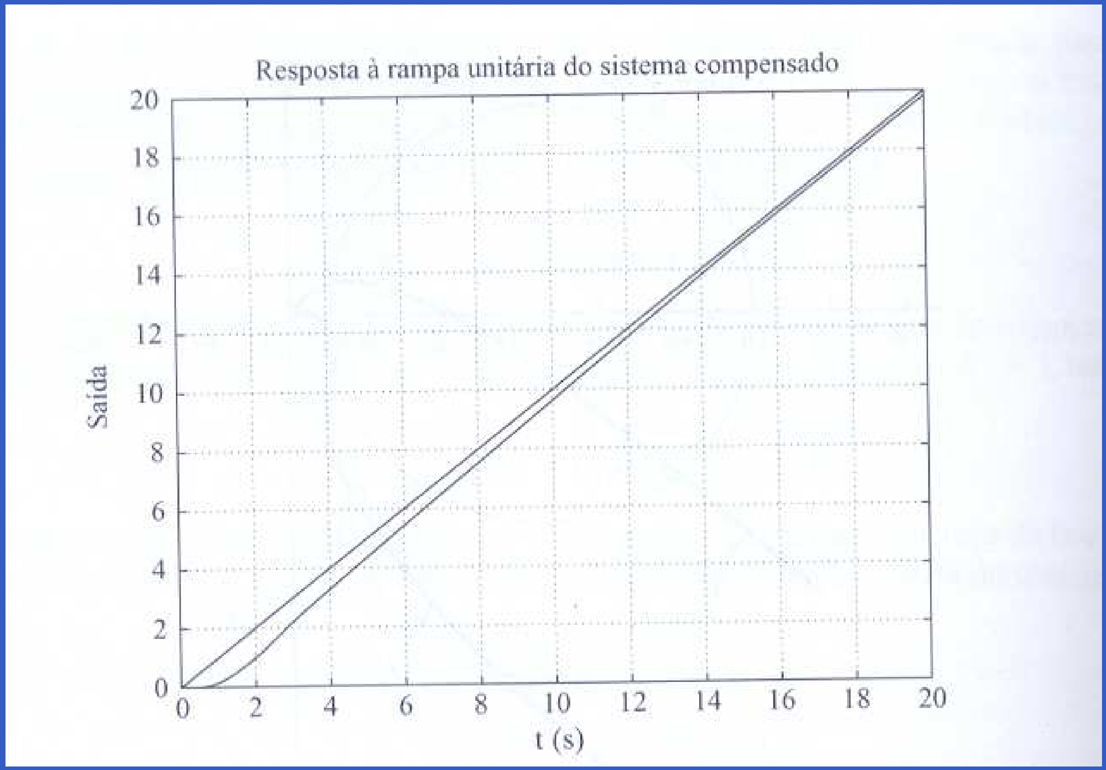
Verificação

- Resposta a degrau



Verificação

- Resposta a rampa



Resumo: avanço de fase

- Utiliza o avanço de fase para aumentar a margem de estabilidade
- Permite maior freqüência de crossover ω_g ou seja maior freqüência de corte ω_c ou seja maior largura de banda B_w
- Se B_w aumenta então o tempo de subida t_r e o tempo de assentamento t_s são menores
- A maior largura de banda permite passar ruídos de alta freqüência
- É necessário em geral aumentar o ganho devido as características atenuantes do controlador por avanço de fase

Resumo: atraso de fase

- Reduz o ganho em altas freqüências sem reduzir o ganho em baixas freqüências, o que permite reduzir o erro estático
- Menor freqüência de crossover ω_g o que resulta numa largura de banda B_w menor
- Largura de banda B_w é menor o que resulta num sistema mais lento

Características no tempo