



**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS**

Universidade da Tecnologia e do Trabalho

**CURSO SUPERIOR DE TECNOLOGIA EM AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL**

**O SISTEMA DINÂMICO PÊNULO INVERTIDO: MODELAGEM E  
PROJETO DE CONTROLADORES POR SIMULAÇÃO  
COMPUTACIONAL**

**FREDERICO SANTOS TEIXEIRA  
JOSÉ LUIS DE FREITAS SODRÉ  
MARCOS RANGEL JUNIOR**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ  
2006**

**FREDERICO SANTOS TEIXEIRA  
JOSÉ LUIS DE FREITAS SODRÉ  
MARCOS RANGEL JUNIOR**

**O SISTEMA DINÂMICO PÊNULO INVERTIDO: MODELAGEM  
E PROJETO DE CONTROLADORES POR SIMULAÇÃO  
COMPUTACIONAL**

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito parcial para conclusão do Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial.

Orientador: Profº Israel Andrade Esquef  
Mestre em Eng. Eletrônica/ UENF

**CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ  
2006**

Este trabalho, nos termos da legislação que resguarda os direitos autorais, é considerado propriedade institucional.

É permitida a transcrição parcial de trechos do trabalho ou menção ao mesmo para comentários e citações desde que não tenha finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(a) autor(a).

Trabalho de Conclusão de Curso intitulado *O Sistema Dinâmico Pêndulo Invertido: Modelagem e Projeto de Controladores por Simulação Computacional*, elaborado por *Frederico Santos Teixeira, José Luís de Freitas Sodré e Marcos Rangel Junior* e apresentado publicamente perante a Banca Avaliadora, como parte dos requisitos para conclusão do Curso Superior de Tecnologia em Automação Industrial.

**Aprovada em 07 de Abril de 2006**

**Banca Avaliadora :**

---

Eng. Israel Andrade Esquef, MSc.  
UENF (Orientador)

---

Prof. Eugenio Ferreira Naegele da Silva, MSc.  
CEFET Campos (Avaliador)

---

Prof. Rafael Rivelino da Silva Bravo , MSc.  
CEFET Campos (Avaliador)

## **AGRADECIMENTOS**

Às nossas famílias e aos amigos pelo apoio presente, pelas dicas, questionamentos e críticas sempre construtivas. A alguns amigos particulares (Antônio, Pedro, Roberta, Sicília e Thiago) que me ajudaram nos momentos em entender que mesmo tendo um outro projeto em paralelo, deram-me forças para continuar. Aos professores que nos ajudaram nos momentos de necessidade, inclusive pela paciência ofertada. E a todos que de certa forma tiveram participação neste trabalho.

## **RESUMO**

Rangel Júnior, Marcos; Sodré, José Luis de Freitas; Teixeira, Frederico Santos. *O sistema dinâmico pêndulo invertido: Modelagem e Projeto de controladores por simulação computacional*. Campos dos Goytacazes, RJ: [s.n.], Centro Federal de Educação Tecnológica, 2006. Monografia (Tecnologia em Automação Industrial).

Palavras-chaves: pêndulo invertido; modelagem matemática; simulação computacional.

Neste trabalho, procurou-se mostrar um estudo comparativo sobre algumas modelagens matemáticas sobre o problema clássico do pêndulo invertido. Utilizando o Kit didático da Feedback, foi possível fazer uma simulação entre algumas modelagens trazidas pela literatura. Utilizando o Matlab® como ferramenta de simulação, pode-se observar os diversos comportamentos das Funções de Transferências (FT's) feitas para ambas modelagens, assim como de seus controladores projetados utilizando o mesmo Matlab®.

# Lista de Figuras

3.1	Representação esquemática do Pêndulo Invertido . . . . .	12
3.2	Esquema representando o diagrama de corpo livre . . . . .	13
4.1	Diagrama de pólos e zeros em malha aberta. (A) Modelo $\alpha$ e (B) modelo $\beta$	17
4.2	Diagrama de pólos e zeros em malha fechada. (A) Modelo $\alpha$ e (B) modelo $\beta$	19
4.3	Resposta ao degrau unitário da FT do modelo $\alpha$ : (A) Malha Aberta, (B) Malha Fechada . . . . .	20
4.4	(A) Resposta ao impulso e, (B) à entrada senoidal, da FT do modelo $\alpha$ em Malha Fechada . . . . .	21
4.5	Resposta ao degrau unitário da FT do modelo $\beta$ : (A) Malha Aberta, (B) Malha Fechada . . . . .	21
4.6	(A) Resposta ao impulso e, (B) à entrada senoidal, da FT do modelo $\beta$ em Malha Fechada . . . . .	22
4.7	Diagrama do Lugar das Raízes ( <i>root locus</i> ). (A) Diagrama do modelo $\alpha$ e (B) diagrama do modelo $\beta$ . . . . .	22
4.8	Resposta transitória a entrada degrau unitário. Resposta referência para o sistema pêndulo invertido definida pelos coeficientes $\zeta = 0.4$ e $\omega_n = 2$ . . .	24
4.9	Região limite no diagrama de root locus para a resposta de referência para o sistema pêndulo invertido definida pelos coeficientes $\zeta = 0.4$ e $\omega_n = 2$ . .	25
5.1	Diagrama de blocos do sistema realimentado e controlador. Neste diagrama, $C(s)$ representa a função de transferência do controlador e $G(s)$ a função de transferência do pêndulo invertido. . . . .	30
5.2	Respostas transitórias do sistema pêndulo invertido após atuação de um controlador tipo PD: (A) Modelo $\alpha$ e (B) modelo $\beta$ . . . . .	31

5.3	Respostas transitórias do sistema pêndulo invertido após atuação de um controlador tipo PID: (A) Modelo $\alpha$ e (B) modelo $\beta$ . . . . .	33
D.1	Tela inicial do modelo Simulink do módulo do Pêndulo Invertido . . . . .	52
D.2	Tela interna do bloco controlador. . . . .	53
D.3	Entrada da posição do pêndulo e do carro. . . . .	54



# Lista de Tabelas

4.1	Valores numéricos para os parâmetros físicos do pêndulo invertido tomando como base os valores do Kit Didático. . . . .	16
4.2	Pólos, zeros e ganhos em malha aberta . . . . .	17
4.3	Pólos, zeros e ganhos em malha fechada . . . . .	20
B.1	Nomes e valores de todos os parâmetros do Kit da Empresa Feedback . . .	46

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação . . . . .	1
1.2	Objetivo . . . . .	1
1.3	Justificativa . . . . .	2
1.4	Metodologia de Pesquisa . . . . .	2
1.5	Organização do Trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Teoria de Controle</b>	<b>5</b>
2.1	Histórico da Teoria de Controle . . . . .	5
2.2	Métodos de Modelagens Matemática Aplicada aos Sistemas de Controle . . . . .	7
2.2.1	Modelagem por Função de Transferência . . . . .	7
2.2.2	Modelagem por Espaço de Estados . . . . .	7
2.3	Modelagem por Função de Transferência Versus Espaço de Estados . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Modelagem Matemática do Pêndulo Invertido</b>	<b>10</b>
3.1	Obtenção das funções de transferência . . . . .	10
3.1.1	Função de Transferência do modelo $\alpha$ . . . . .	10
3.1.2	Função de Transferência do modelo $\beta$ . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Técnicas de Projeto</b>	<b>15</b>
4.1	Função de Transferência em Malha Aberta (MA) . . . . .	16
4.1.1	Análise da Função . . . . .	16
4.2	Função de Transferência em Malha Fechada (MF) . . . . .	18
4.2.1	Análise da Função . . . . .	18
4.3	Análise da Resposta Transitória . . . . .	18
4.3.1	Modelo $\alpha$ . . . . .	19

4.3.2	Modelo $\beta$ . . . . .	20
4.3.3	Análise do Lugar das Raízes: modelos $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	21
4.4	Análise de Estabilidade . . . . .	25
4.4.1	Critério de Routh-Hurwitz da FT em MF do modelo $\alpha$ . . . . .	26
4.4.2	Análise da estabilidade segundo o critério de Routh-Hurwitz da FT em MF do modelo $\beta$ . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Projeto dos Controladores</b>	<b>28</b>
5.1	Projeto de Controladores por Função de Transferência . . . . .	28
5.2	Controladores para os Modelos $\alpha$ e $\beta$ . . . . .	29
5.2.1	Algoritmo PD Paralelo . . . . .	30
5.2.2	Algoritmo PID série . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Programas de Simulação em Matlab</b>	<b>36</b>
<b>B</b>	<b>Parâmetros do kit didático Pêndulo Invertido - Empresa Feedback</b>	<b>45</b>
<b>C</b>	<b>Cálculos das amplitudes do Pêndulo</b>	<b>47</b>
<b>D</b>	<b>Projeto dos Controladores por Espaço de Estados</b>	<b>48</b>
D.0.3	Método de Substituição Direta . . . . .	49
D.0.4	Método da Fórmula de Ackermann . . . . .	50
D.1	Análise do Modelo Simulink . . . . .	51
	<b>Bibliografia</b>	<b>56</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Apresentação

O desenvolvimento de técnicas de modelagem e controle de sistemas dinâmicos industriais tem como objetivo a qualidade e otimização de processos. Desde o início do desenvolvimento da Teoria de Controle, e a conseqüente implementação de técnicas de controle aos processos, estes objetivos têm sido alcançados de uma forma evolutiva, já existindo soluções aplicáveis para a maioria dos problemas. A pesquisa na área de controle tem importância fundamental no desenvolvimento e aprimoramento das técnicas que muitas vezes são criadas para solucionar problemas específicos e se generalizam a partir da aplicação em outros sistemas. Esse constante desenvolvimento tem como objetivo, a rigor, fornecer todas soluções possíveis para o problema de controle. Paralelamente ao desenvolvimento de técnicas e teorias, a evolução tecnológica tem auxiliado na rápida implementação destas técnicas em controladores com mais recursos e mais eficientes. Portanto, a padronização e minimização de custos tornaram-se mais viáveis. É neste contexto que este trabalho está inserido: um estudo preliminar, exemplificado, sobre algumas destas técnicas e suas aplicações.

### 1.2 Objetivo

O trabalho tem por objetivo comparar diferentes modelagens matemáticas para o sistema dinâmico conhecido como Pêndulo Invertido. Este sistema tem sido utilizado como uma referência no estudo de técnicas de controle, devido a sua complexidade e suas características

particulares de instabilidade natural e não linearidade. Pretende-se propor dois tipos de modelagem matemática para o sistema, em crescentes níveis de complexidade e, a partir delas, simular a atuação de controladores clássicos projetados e simulados por software. Um dos principais objetivos de investigação é determinar o quanto um detalhamento na etapa de modelagem matemática pode influenciar na eficiência e performance do controlador. Tem-se ainda como meta adicional implementar o Módulo do Pêndulo Invertido fabricado pela Empresa Feedback e descrever o funcionamento do seu sistema computacional.

### **1.3 Justificativa**

O estudo da Teoria de Controle em sistemas dinâmicos e a aplicação destas técnicas em um sistema dinâmico, complexo e com características não lineares, é de fundamental importância na consolidação dos conceitos assimilados ao longo da formação de um profissional da área de Automação Industrial. A utilização de modelos diferenciados e a análise de resultados em simulações no computador podem auxiliar no desenvolvimento e implementação de controladores reais, levando-se em consideração não somente características de performance, mas também de custos e dimensões físicas.

### **1.4 Metodologia de Pesquisa**

No trabalho foram utilizados dois diferentes modelos matemáticos que tratam do mesmo sistema dinâmico, o Pêndulo Invertido. Cada um desses modelos tem um nível de complexidade diferenciado no que diz respeito à descrição de características físicas. Em cada um dos modelos obtidos será feita uma abordagem no domínio da frequência, utilizando a Transformada de Laplace para a obtenção da Função de Transferência (FT) do modelo linearizado. Em seguida, uma análise da resposta transitória em malha aberta e em malha fechada são necessárias para a determinação do tipo e características dos controladores que devem ser aplicados ao sistema. O objetivo é projetar um controlador que atue no sistema e consiga manter o pêndulo na posição vertical superior, sendo capaz ainda de suportar perturbações de intensidade moderada. Estes controladores serão implementados por software. Os resultados serão discutidos tomando como base aspectos de viabilidade de implementação física e a relação complexidade  $x$  custos.

Os modelos matemáticos para o sistema Pêndulo Invertido que serão apresentados foram baseados em modelos presentes na literatura. O primeiro modelo estudado, presente em [1], pode ser considerado mais simplificado se comparado ao segundo modelo, presente em [2]. Daqui em diante os modelos serão chamados *Modelo  $\alpha$*  [1] e *Modelo  $\beta$*  [2].

Os testes computacionais foram realizados no software *Matlab*, [3]. Os gráficos dos controladores obtidos, que estão presentes neste escopo, são de fundamental importância para o desenvolvimento desse trabalho, pois eles apresentam o comportamento dinâmico para os diferentes níveis (ou técnicas de modelagem) e a partir deles será feita a comparação de eficiência para os modelos analisados e controladores projetados.

A análise da resposta transitória do sistema em malha aberta e em malha fechada será realizada aplicando funções de teste (funções singulares) como sinal de entrada apresentada às Funções de Transferência de cada um dos modelos. Tais funções são matematicamente simples porém eficazes na investigação a resposta do sistema (saída do sistema) a sinais de entradas reais (com maior complexidade). A partir da resposta transitória do sistema tendo as funções de teste como entrada, pode se iniciar o projeto e sintonia de controladores do tipo Proporcional, Integral e Derivativo (PID) nas configurações série e paralelo, e versões que suprimam uma ou mais ações de controle, como por exemplo o controlador PD, em que a ação integral é suprimida. Os gráficos representativos da resposta transitória para os sinais de entrada, aplicada aos diferentes modelos, serão comparados e os resultados dessas análises, servirão de base para a obtenção do melhor controlador para o sistema.

## 1.5 Organização do Trabalho

O trabalho se divide em 7 (sete) capítulos, nos quais serão descritos: no Capítulo 2, um breve histórico da evolução da Teoria de Controle, as abordagens por Função de Transferência e Espaço de Estados e a proposta de aplicação das duas abordagens em duas modelagens diferentes do Sistema do Pêndulo Invertido. No Capítulo 3 (três), são apresentadas as duas modelagens para o sistemas Pêndulo Invertido propostas por este trabalho. No Capítulo 4 (quatro), apresenta o estudo com as técnicas de controle, com a apresentação da rotina de estudos e investigações da dinâmica do sistema. No Capítulo 5 (cinco), contém o projeto de controladores. No Capítulo 6 (seis), apresenta as conclusões sobre os resultados obtidos, e propostas de utilização este Kit Didático. E finalmente, no Capítulo 7 (sete),

as referências utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

# Capítulo 2

## Teoria de Controle

Neste capítulo será visto um breve histórico da Teoria de Controle, sua necessidade e as distintas abordagens de Modelagem Matemática por Função de Transferência e por Espaço de Estados.

Abaixo seguem em tópicos, os temas abordados acima.

### 2.1 Histórico da Teoria de Controle

Nos últimos 60 anos a teoria de controle de sistemas dinâmicos tem experimentado um progresso notável, tendo um papel fundamental na sociedade tecnológica moderna. Aplicações de controle automático podem ser encontradas em praticamente todas as instâncias, desde forma mais simples como no controle de temperatura de refrigeradores, até formas altamente sofisticadas como, por exemplo, no controle de veículos aeroespaciais e satélites. Essa teoria tem contribuído de forma fundamental para o progresso tecnológico em diversas áreas nas décadas recentes. Ela tem tido um grande impacto mesmo em áreas como modelagem biológica e economia. Além disso, desafios recentes como comunicação em alta velocidade, tecnologia de manufatura, robótica e análise de imagens, dependem fortemente de técnicas de controle. A teoria de controle é relativamente recente. Um dos primeiros trabalhos foi o estudo de James Maxwell sobre a estabilidade de máquinas a vapor em 1868.

Historicamente, a “teoria clássica” de controle (linear-invariante no tempo-determinístico) foi desenvolvida no período 1930–1940, e forneceu a base para o desenvolvimento da teoria de controle com aplicações industriais, utilizadas até os dias de hoje. Esse período se carac-



teriza pelo uso de abordagens no domínio da frequência. Conceitos fundamentais tais como pólos e zeros, diagramas de Bode, Nyquist e Nichols, e lugar das raízes, foram formalizados naquela época. Foi nesse período que a estrutura de *feedback* se revelou, de maneira definitiva, como eficiente para assegurar desempenho satisfatório, mesmo quando não se tem conhecimento completo do sistema a ser controlado. No período 1940-1950, incertezas foram formalmente introduzidas na teoria clássica, que foi assim estendida para sistemas lineares-invariantes no tempo envolvendo sinais aleatórios estacionários através da Teoria de Wiener sobre Filtragem e Predição. Por outro lado, o que hoje é conhecido por “teoria moderna” de controle, no caso de sistemas determinísticos, germinou nos anos cinquenta (consolidando-se a partir dos anos sessenta), e se caracteriza pelo uso de abordagens no domínio do tempo. Ao longo dos anos tornou-se evidente a necessidade de se caracterizar adequadamente as incertezas no modelo. Essas incertezas podem ser decorrentes, por exemplo, de parâmetros desconhecidos e/ou variáveis, dinâmicas não modeladas, ruídos e diversos tipos de perturbações, etc. Assim como a teoria clássica foi estendida para incluir os efeitos de incertezas, modeladas por distúrbios aleatórios, percebeu-se rapidamente a necessidade de se estender a teoria moderna neste cenário. Essa necessidade foi particularmente impulsionada pela corrida espacial, que motivou o desenvolvimento de diversas teorias.

O período de 1960 a 1980 presenciou um florescimento de técnicas para lidar com incertezas, modeladas via sinais aleatórios, através da teoria de controle estocástico.

Uma outra abordagem importante de controle para lidar com incertezas é conhecida como controle adaptativo. Os primeiros resultados teóricos mais relevantes foram obtidos na década de 70. Esse resultados requeriam hipóteses pouco realistas, tal como inexistência de dinâmica não modelada. A década de 80 presenciou um grande esforço no estabelecimento de algoritmos de controle adaptativo robustos. Mais recentemente tem havido grande interesse em se estender os resultados existentes para sistemas não-lineares. A utilização de redes neurais em controle adaptativo deu um novo impulso a essa área. Adicionalmente, tem havido também na literatura um continuado interesse em controle adaptativo para sistemas estocásticos, pois neste contexto, o controle adaptativo exhibe sua característica básica: deve efetuar um compromisso entre aprendizagem, regulação e cautela.

Colaboradores na matemática, no projeto dos sistemas de controle, análise, são inúmeros:

- Pierre Laplace (1749-1827): idealizou a transformada de Laplace, a base da maioria

dos procedimentos de análise e projeto dos sistemas;

- Isaac Newton (1642-1727): modelagem matemática e análise;
- Brook Taylor: análise matemática, com a série de Taylor;
- James Maxwell (1831-1879): modelamento e análise;
- Edward Routh (1831-1907): critério de estabilidade de Routh;
- Harry Nyquist (1889-1976): com o critério de Nyquist;
- Hendrik Bode (1905-1982): com o diagrama de Bode;
- Charles Steinmetz (1865-1923): análise da resposta em frequência usando números complexos;

## **2.2 Métodos de Modelagens Matemática Aplicada aos Sistemas de Controle**

### **2.2.1 Modelagem por Função de Transferência**

Após se encontrar as equações diferenciais que regem o sistema linear invariante no tempo (LTI) em questão, aplica-se a Transformada de Laplace nesta equação, considerando nulas todas as condições iniciais e resolvendo-a de acordo com a relação Saída/Entrada, tem-se a Função de Transferência (FT) do sistema. Esta Função faz a análise do sistema no domínio da frequência. A equação diferencial encontrada após a modelagem, é no domínio do tempo, a Transformada de Laplace passa a equação diferencial para o domínio da frequência. Na apresentação das modelagens propostas, será exemplificado a Função de Transferência.

### **2.2.2 Modelagem por Espaço de Estados**

O objetivo do modelo de variáveis de estado, ou modelo por Espaço de Estados, é desenvolver uma representação que preserve a entrada-saída (assim como na função de Transferência), mas que expresse em  $n$  equações de primeira ordem para um sistema de ordem  $n$ . A vantagem é que, além das características de entrada-saída, as características

internas do sistema são representadas. Eis algumas razões para o desenvolvimento dos modelos de estado:

- Análise e projeto dos modelos de estado auxiliados por computador são executados mais facilmente para os sistemas de ordem elevada, enquanto a abordagem por função de transferência tende a falhar para estes sistemas;
- Nos procedimentos de projeto por variáveis de estado, é realimentado um maior número de informações (variáveis internas) sobre o processo, assim pode-se implementar um controle mais completo para o sistema elaborado a partir do método da função de transferência;
- Para modelos de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), onde uma entrada influencia em mais de uma saída, ou vice-versa, este tipo de modelagem faz que um entendimento melhor sobre o sistema seja adquirido.

Para um completo entendimento de Modelagem por Espaço de Estados, alguns conceitos têm que ser introduzidos:

- a) Estado: é o menor conjunto de variáveis (denominadas variáveis de estado), tais que o conhecimento deste conjunto de variáveis num determinado tempo  $t = t_0$ , juntamente com a entrada para  $t > t_0$ , pode-se determinar o comportamento do sistema para qualquer instante  $t > t_0$ .
- b) Variáveis de Estado: são aquelas que constituem o menor conjunto de variáveis capazes de determinar o estado desse sistema. Não há necessidade de que estas variáveis sejam quantidades completamente mensuráveis ou observáveis. Entretanto, é conveniente escolher-se para variáveis grandezas que sejam facilmente mensuráveis, porque as leis de controle ótimo requerem a realimentação de todas as variáveis de estado com ponderação adequada.
- c) Vetor de Estado: se forem necessários  $n$  variáveis de estado para descrever o sistema, então essas  $n$  variáveis podem ser consideradas os  $n$  componentes de um vetor  $x$ . Este vetor é denominado vetor de estado.
- d) Espaço de Estados: espaço  $n$ -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos das variáveis de estado, é chamado espaço de estados.

Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Genericamente, podemos representar as matrizes de espaço de estados por letras, de modo que:

$$\frac{d[x]}{dt} = A. [x(t)] + B. [u(t)]$$

$$y(t) = C. [x(t)] + D. [u(t)]$$

onde:

A: Matriz de Estado;

B: Matriz de Entrada;

C: Matriz de Saída;

D: Matriz de Transmissão direta.

## 2.3 Modelagem por Função de Transferência Versus Espaço de Estados

Modelagem por Função de Transferência é comumente denominada Teoria de Controle Clássico, do mesmo modo que a Modelagem por Espaço de Estados é denominada Teoria de Controle Moderno. Essas duas contrastam, pois a segunda é geralmente aplicada a sistemas de várias entradas e várias saídas, que podem ser lineares ou não-lineares, enquanto que a primeira é aplicada apenas a sistemas lineares, isto é, invariantes no tempo e com entrada e saídas únicas.

Neste trabalho a modelagem será baseada na teoria de controle clássico, ou seja, no domínio da frequência por FT, utilizando modelos linearizados do sistema dinâmico Pêndulo Invertido.

# Capítulo 3

## Modelagem Matemática do Pêndulo Invertido

### 3.1 Obtenção das funções de transferência

Este capítulo apresenta o desenvolvimento matemático até a obtenção da função transferência que serão utilizadas posteriormente no projeto dos controladores.

O sistema em estudo, o pêndulo invertido, é composto por um trilho onde corre um carrinho, e neste carrinho é fixada uma haste com um peso na sua extremidade e o objetivo é equilibrar este peso ortogonalmente em relação ao trilho. (ver Figura 3.1).

#### 3.1.1 Função de Transferência do modelo $\alpha$

Este desenvolvimento foi baseado no modelo presente na literatura [1].

Inicialmente, deve-se definir as coordenadas  $(x,y)$  do centro de gravidade da haste do pêndulo  $(x_G,y_G)$ .

$$x_G = x + l.\text{sen } \theta \quad (3.1)$$

$$y_G = l.\text{cos } \theta \quad (3.2)$$

sendo  $\theta$  o ângulo da haste com a vertical.

O movimento de rotação da haste do pêndulo em torno de seu centro de gravidade pode ser descrito como:

$$I\ddot{\theta} = Vl\text{sen } \theta - Hl\text{cos } \theta \quad (3.3)$$

onde o momento de inércia  $I$  é o momento de inércia da haste em relação ao seu centro de gravidade.

O movimento horizontal (H) do centro de gravidade da haste do pêndulo é dado por:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (3.4)$$

O movimento vertical (V) do centro de gravidade da haste do pêndulo é dado por:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} (l \cos \theta) = V - mg \quad (3.5)$$

sendo  $m$  a massa da haste do pêndulo.

O movimento horizontal do suporte móvel é dado por:

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = u - H \quad (3.6)$$

sendo  $M$  a massa do suporte móvel.

As equações 3.1 a 3.6 representam o movimento do conjunto pêndulo invertido-suporte móvel. Estas equações envolvem  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  e são por isto mesmo não-lineares.

Admitindo que o ângulo  $\theta$  seja pequeno, o conjunto de equações acima descrito acima pode ser linearizado resultando nas seguintes equações respectivamente:

$$I\ddot{\theta} = V l \theta - H l \quad (3.7)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (3.8)$$

$$0 = V - mg \quad (3.9)$$

$$M\ddot{x} = u - H \quad (3.10)$$

Das equações 3.8 e 3.10, vem:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3.11)$$

e das equações 3.7, 3.8 e 3.9 se obtém :

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= mgl\theta - Hl \\ &= mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

ou seja,

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (3.12)$$

As equações 3.11 e 3.12 constituem o modelo matemático do sistema. As mesmas descrevem o movimento do conjunto pêndulo invertido-suporte móvel.

Eliminando a variável  $\ddot{x}$  das equações 3.11 e 3.12 obtém-se uma nova equação:

$$(M + m)\frac{mgl\theta - (I + ml^2)\ddot{\theta}}{ml} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3.13)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na equação 3.13 e sendo suas condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência do processo a controlar como sendo:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{m.l.s^2}{-[(m + M)I + Mml^2]s^4 + (m + M)mgl s^3} \quad (3.14)$$

### 3.1.2 Função de Transferência do modelo $\beta$

Uma segunda abordagem mais completa para a modelagem do sistema é apresentada a seguir. Este desenvolvimento foi baseado em um modelo para o pêndulo apresentado em [2]. No esquema apresentado na figura 3.1 é mostrado o carrinho com as forças que agem sobre ele:

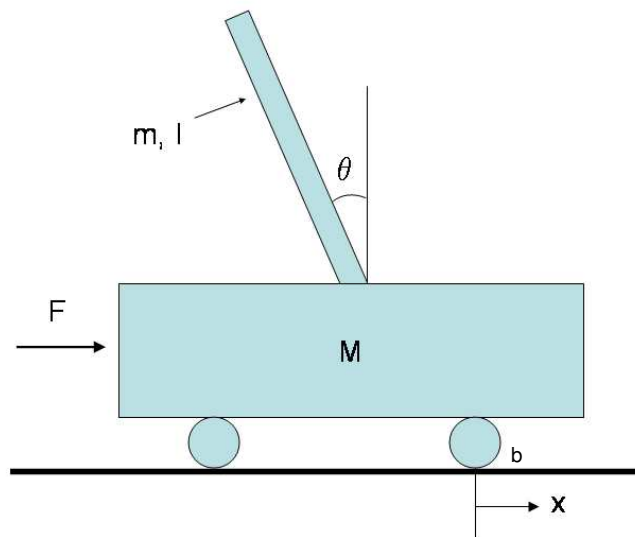


Figura 3.1: Representação esquemática do Pêndulo Invertido

M - Massa do carro

m - Massa do pêndulo

b - Coeficiente de atrito do carro no trilho

l - Distância do eixo ao centro de massa

- I - Inércia do pêndulo
- F - Força aplicada no carro
- x - Coordenada de posição do carro
- $\theta$  - Ângulo do pêndulo com a vertical

Na figura 3.2 é apresentado o diagrama do corpo livre, onde são mostradas as forças atuantes no carrinho e na haste. Somando as forças no diagrama de corpo livre do carro

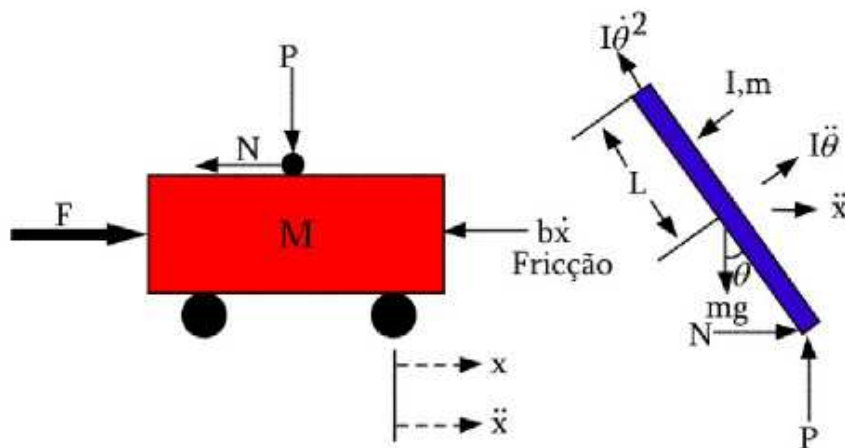


Figura 3.2: Esquema representando o diagrama de corpo livre

na direção horizontal tem-se a seguinte equação:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + N = F \quad (3.15)$$

Agora, somando as forças no diagrama do pêndulo (forças aplicadas na haste) é obtida:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \quad (3.16)$$

Substituindo a equação 3.15 na equação 3.16, teremos a primeira equação do movimento, que é dada por:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \quad (3.17)$$

Para começarmos a obtenção da segunda equação do movimento para o sistema, faz-se o somatório da posição vertical do pêndulo:

$$P\sin\theta + N\cos\theta - mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x}\cos\theta \quad (3.18)$$



E o somatório dos momentos em torno do centro de massa do sistema:

$$-Plsen\theta - Nlcos\theta = I\ddot{\theta} \quad (3.19)$$

Substituindo a equação 3.19 na equação 3.18 obteremos a segunda equação do movimento:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl sen\theta = -ml\ddot{x}cos\theta \quad (3.20)$$

Trabalhando algebricamente com as equações 3.17 e 3.20, fazendo as devidas linearizações, resolvendo a equação diferencial por Laplace e relacionando a entrada (força U) com a saída  $\Theta$  (posição angular da haste), tem-se:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I+ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M+m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \quad (3.21)$$

onde  $q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2]$

# Capítulo 4

## Técnicas de Projeto

Abordaremos neste capítulo o estudo da resposta transitória e características dinâmicas dos modelos  $\alpha$  e  $\beta$  desenvolvidos no capítulo anterior. As FT obtidas por aplicação da Transformada de Laplace nos modelos foram modificadas com a inserção dos valores numéricos dos parâmetros físicos obtidos em [4] e que são definidos para o kit didático disponível no Laboratório de Controle e Automação. A resposta transitória e permanente dos modelos serão analisadas apresentando funções de teste à entrada do sistema, por simulação computacional. A utilização das grandezas físicas do kit didático teve como motivação incentivar novos grupos de estudantes a implementar de diferentes tipos de controladores para diferentes tipos de modelagens neste sistema real. Este trabalho está restrito portanto a parte teórica e de simulação para o sistema Pêndulo Invertido. São apresentadas comparações das respostas em malha aberta e malha fechada, assim como análises de instabilidade, diagramas de pólos e zeros, root locus por simulações realizadas no *MatLab<sup>TM</sup>*. Durante as análises, abordaremos os seguintes aspectos de forma comparativa:

- Função de transferência em Malha Aberta (MA)
  - Análise do diagrama de pólos e zeros
  - Resposta ao degrau unitário
  
- Função de transferência em Malha Fechada (MF)
  - Análise do diagrama de pólos e zeros
  - Resposta ao degrau unitário
  - Resposta ao impulso unitário

– Resposta ao seno/cosseno

- Análise do diagrama do Lugar das Raízes (*Root Locus*)

## 4.1 Função de Transferência em Malha Aberta (MA)

Retomando os modelos obtidos no Capítulo 3 com as FTs obtidas para modelos  $\alpha$  e  $\beta$ , pode-se atribuir valores numéricos para os parâmetros físicos extraídos de [4]. A Tabela 4.1 apresenta os valores para os parâmetros utilizados no processo de modelagem matemática. O comprimento da haste ( $L$ ) é considerado da base da haste até o centro de gravidade. A massa ( $m$ ) inclui a carga e a massa ( $M$ ) inclui também os posicionadores do pêndulo. Os demais parâmetros do kit didático pode ser encontrado no Anexo B

Tabela 4.1: Valores numéricos para os parâmetros físicos do pêndulo invertido tomando como base os valores do Kit Didático.

Valores numéricos para os parâmetros físicos		
Comprimento da haste	(L)	0,146 m
Massa da haste	(m)	0,12 kg
Massa do carro	(M)	1,12 kg
Momento de Inércia do pêndulo.	(I)	0,0123321 kg/m <sup>2</sup>
Fricção dinâmica do carro.	(B)	2,53165 kg.m <sup>2</sup> /s

### 4.1.1 Análise da Função

Substituindo valores e considerando  $g = 9.81m/s^2$ , temos a FT em malha aberta para o modelo  $\alpha$ , :

$$G_{\alpha}(s) = \frac{-0.9649s^2}{s^4 - 11,7378s^3} \quad (4.1)$$

e para o modelo  $\beta$ :

$$G_{\beta}(s) = \frac{0.06823s^2}{s^4 + 0.1468s^3 - 0.8299s^2 - 1.6944s} \quad (4.2)$$

Apenas inspecionando as FTs em MA para o modelos podemos observar que ambos apresentarão pólos no Semi-Plano Direito (SPD) e portanto a instabilidade em MA ca-

Tabela 4.2: Pólos, zeros e ganhos em malha aberta

	Pólos	Zeros	K
$FT \alpha$	P1=3,9166 P2=-3,9166	Não há	K=-1,2610
$FT \beta$	P1= 0 P2=1.3670 P3=-0.7569 + 0.8164i P4=-0.7569 - 0.8164i	Z1=0 Z2=0	K=1,2610

racterística do sistema. Uma observação importante é a ausência do termo  $s$  central do modelo  $\alpha$ , ou seja, anulando o fator de amortecimento. Isto ocorre quando simplificamos o modelo anulando pólos com zeros localizados na origem. Na prática, a característica negativa do termo independente não confere a esperada característica oscilatória senoidal e sim a instabilidade absoluta. O modelo  $\beta$  se mostra mais complexo, com grau 4, sendo que com a anulação do pólo e zero na origem, retorna para um modelo de terceira ordem.

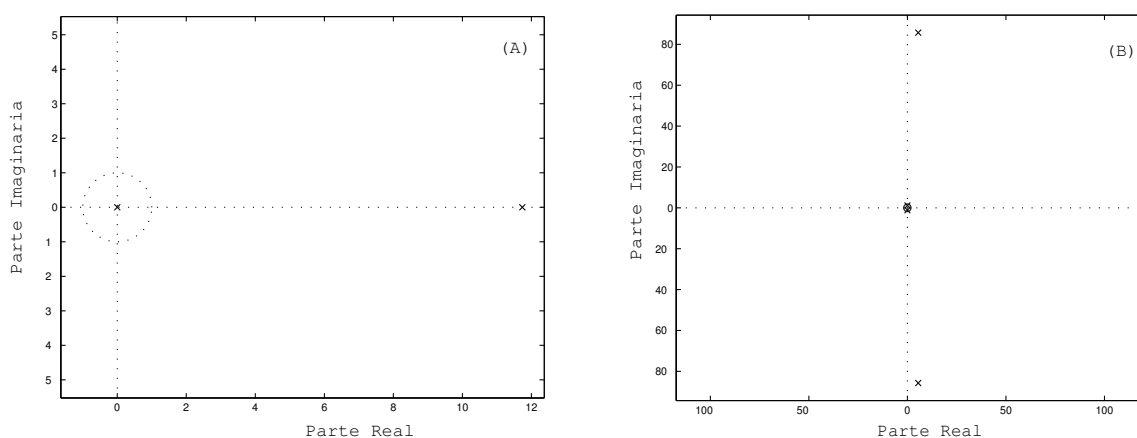


Figura 4.1: Diagrama de pólos e zeros em malha aberta. (A) Modelo  $\alpha$  e (B) modelo  $\beta$

A figura 4.1 apresenta os diagramas de pólos e zeros em MA para os dois modelos, facilitando a visualização das raízes no SPD, resultando na instabilidade.

## 4.2 Função de Transferência em Malha Fechada (MF)

### 4.2.1 Análise da Função

A obtenção da expressão matemática para um sistema realimentado é dado por:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.3)$$

sendo  $G(s)$  a função de transferência em malha aberta e  $H(s)$  um ganho de realimentação. O caso particular em que  $H(s)$  é igual a 1, chama-se de realimentação unitária.

Depois de aplicada a retroalimentação, as funções trabalhadas se apresentaram da seguinte forma:

- Modelo  $\alpha$

$$F_{\alpha}(s) = \frac{-0.9649s^2}{s^4 - 11.74s^3 - 0.9649s^2} \quad (4.4)$$

que simplificado fica:

$$F_{\alpha}(s) = \frac{-0.9649}{s^2 - 11.74s - 0.9649} \quad (4.5)$$

- Modelo  $\beta$

$$F_{\beta}(s) = \frac{0.06823s^2}{s^4 + 0.1468s^3 - 0.7617s^2 - 1.694s} \quad (4.6)$$

que simplificado fica:

$$F_{\beta}(s) = \frac{0.06823s}{s^3 + 0.1468s^2 - 0.7617s - 1.694} \quad (4.7)$$

A figura 4.2 apresenta o diagrama de pólos e zeros dos modelos  $\alpha$  e  $\beta$  em malha fechada.

## 4.3 Análise da Resposta Transitória

A resposta transitória de um sistema a entradas conhecidas é de fundamental importância para estudo e projeto de controladores. Optamos por analisar a resposta ao degrau em MA e MF, ao impulso e seno apenas em MF, a fim de evitar redundâncias. A seguir são apresentados os gráficos resultantes das simulações em Matlab.

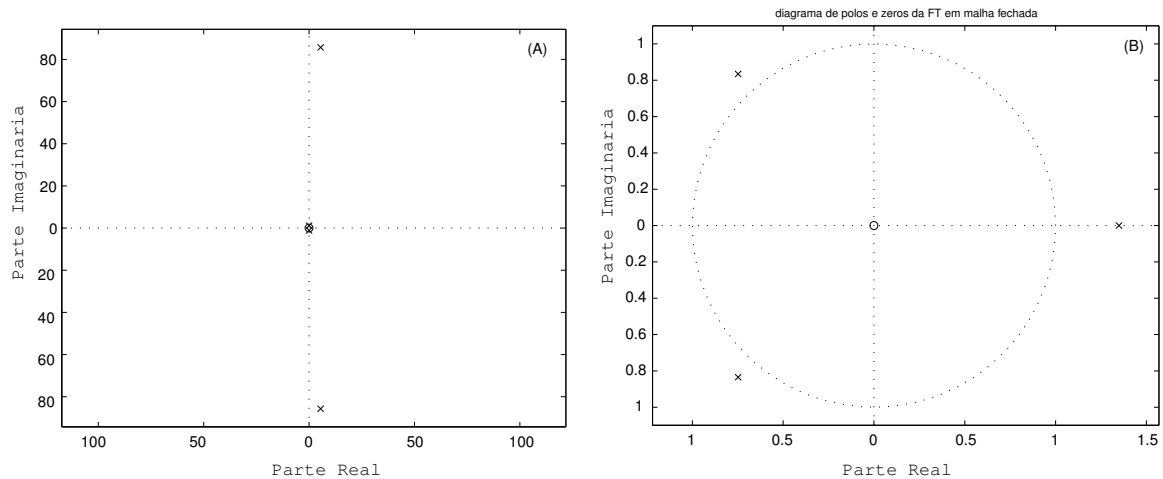


Figura 4.2: Diagrama de pólos e zeros em malha fechada. (A) Modelo  $\alpha$  e (B) modelo  $\beta$

### 4.3.1 Modelo $\alpha$

#### Resposta ao Degrau Unitário

A resposta ao degrau em MA, figura 4.3, nos informa o já observado na inspeção da FT, o sistema é instável. A resposta do sistema extrapola o limite do degrau, tendendo para infinito. A inversão de direção do gráfico é apenas devido a presença do sinal negativo no numerador, fato que não tem significado físico relevante.

Do mesmo modo que em MA, a resposta ao degrau do sistema realimentado, ou seja, em MF, também apresentou comportamento de instabilidade. Em alguns casos, a realimentação pode modificar a posição dos pólos e tornar um sistema instável em estável, apenas aplicando a realimentação negativa. Neste caso isto não ocorre, sendo necessário, portanto a introdução de um controlador.

#### Resposta ao Impulso e Rampa

As respostas ao impulso e ao seno são importantes pois simulam a presença de perturbações impulsivas e vibracionais (com periodicidade). O impulso ainda tem a vantagem de ser uma perturbação que atua em faixa ampla no domínio da frequência. A figura 4.4 apresenta os resultados das simulações para a resposta ao impulso e ao seno. Novamente percebe-se características de instabilidade análogas à resposta ao degrau.

Tabela 4.3: Pólos, zeros e ganhos em malha fechada

	Pólos	Zeros	K
$FT \alpha$	P1=0 P2=0 P3=11.8194 P4=-0.0816	Z1=0 Z2=0	K=-0.9649
$FT \beta$	P1=0 P2=1.3490 P3=-0.7479 + 0.8347i P4=-0.7479 - 0.8347i	Z1=0 Z2=0	K=1.3670

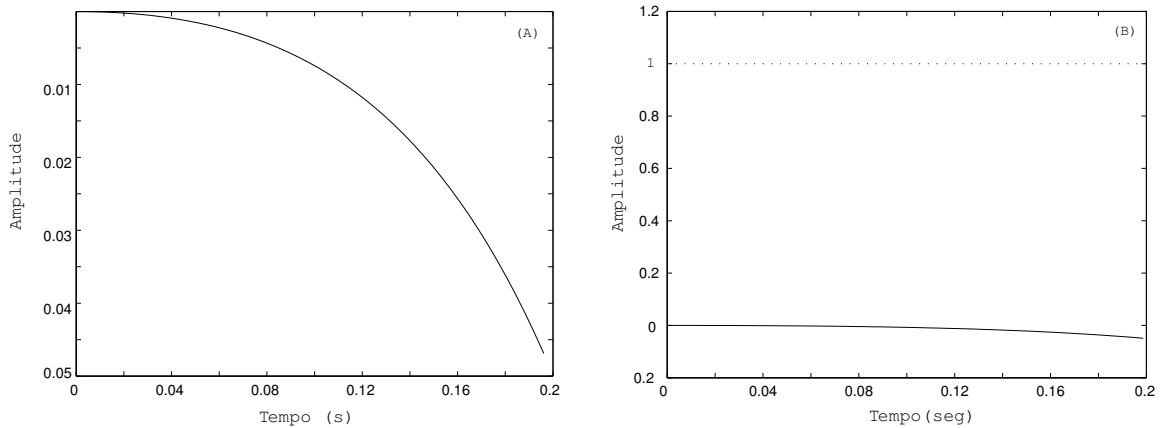


Figura 4.3: Resposta ao degrau unitário da FT do modelo  $\alpha$ : (A) Malha Aberta, (B) Malha Fechada

### 4.3.2 Modelo $\beta$

#### Resposta ao Degrau Unitário

Do mesmo modo que para o modelo  $\alpha$ , a resposta ao degrau em MA indica claramente que o sistema é instável. A resposta do sistema extrapola o limite do degrau, tendendo para infinito.

Do mesmo modo que em MA, a resposta ao degrau do sistema realimentado, ou seja, em MF, também apresentou comportamento de instabilidade. A figura 4.5 apresenta as curvas de respostas obtidas utilizando o *Matlab*.

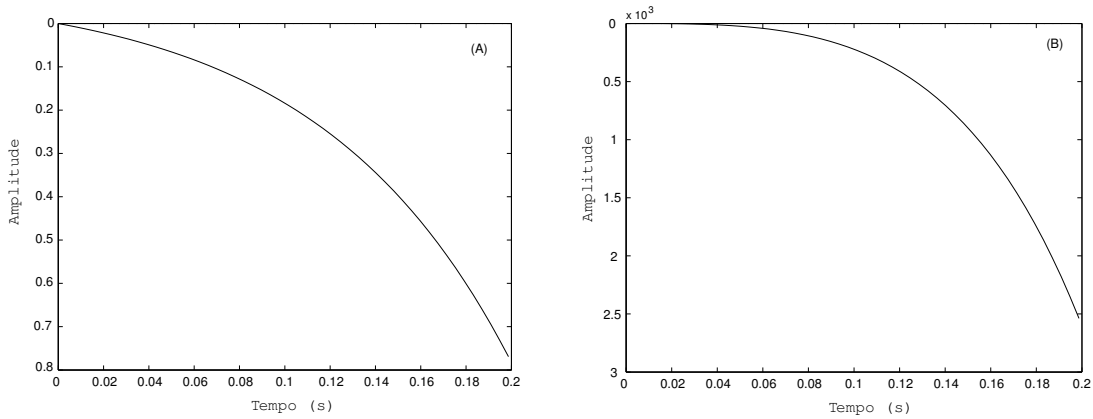


Figura 4.4: (A)Resposta ao impulso e, (B) à entrada senoidal, da FT do modelo  $\alpha$  em Malha Fechada

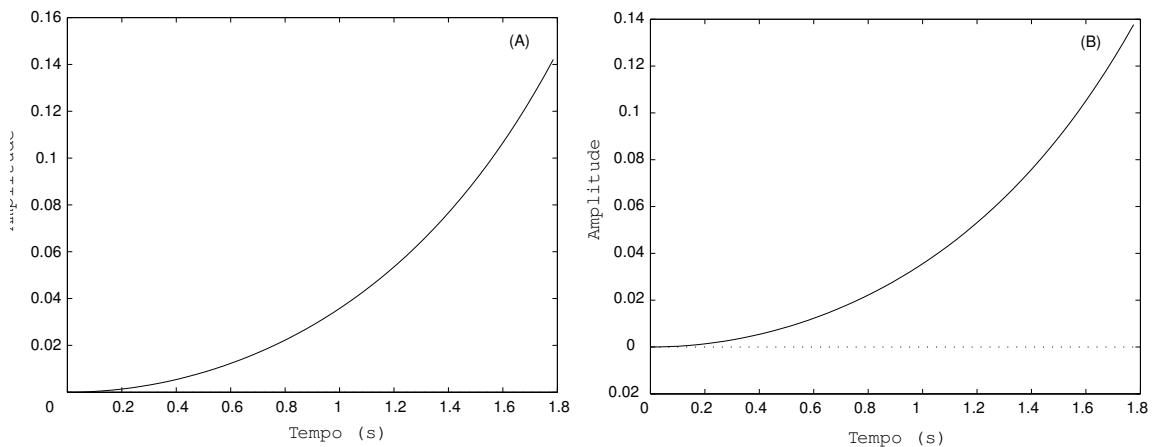


Figura 4.5: Resposta ao degrau unitário da FT do modelo  $\beta$ : (A) Malha Aberta, (B) Malha Fechada

### Resposta ao Impulso e Rampa

A figura 4.6 apresenta os resultados das simulações para a resposta ao impulso e ao seno. Também para o modelo  $\beta$  percebe-se características de instabilidade análogas à resposta ao degrau.

### 4.3.3 Análise do Lugar das Raízes: modelos $\alpha$ e $\beta$

O lugar das raízes é uma ferramenta gráfica utilizada na análise das respostas dos sistemas de controle com retroação, e também no projeto de controladores para estes sistemas. Estes diagramas, mostram graficamente as raízes da equação característica (pólos) do sistema



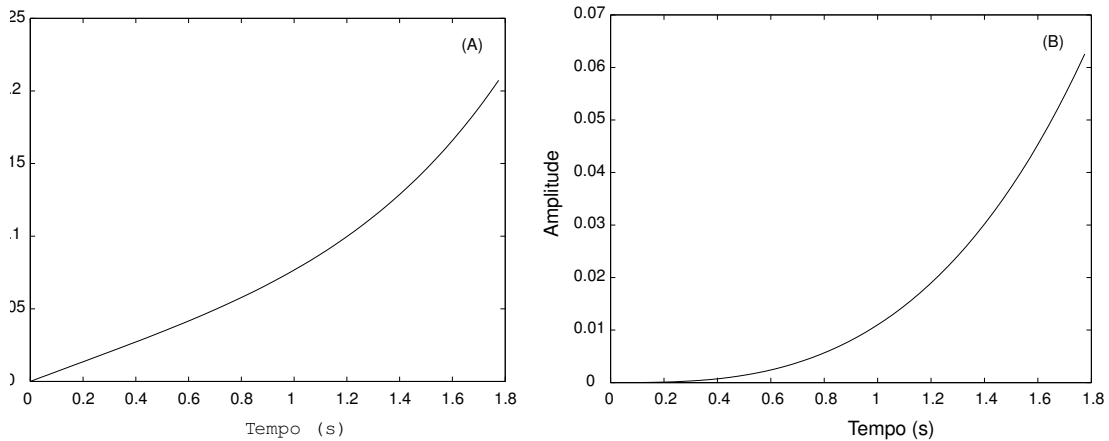


Figura 4.6: (A) Resposta ao impulso e, (B) à entrada senoidal, da FT do modelo  $\beta$  em Malha Fechada

em estudo no plano  $s$ , e suas trajetórias ao longo do plano a medida que são alterados parâmetros da FT, como o ganho de realimentação, por exemplo. Dessa forma pode se definir a melhor posição possível das raízes do sistema de modo a obter a resposta transitória o mais próxima da desejada.

Assim, pode-se por inspeção do diagrama do lugar das raízes e perceber se os pólos localizados no SPD se deslocam ou não para o semi-plano esquerdo (SPE) para determinados valores do ganho de realimentação. Isto já determina que o sistema passa da instabilidade para a estabilidade, podendo portanto ser controlado mais facilmente.

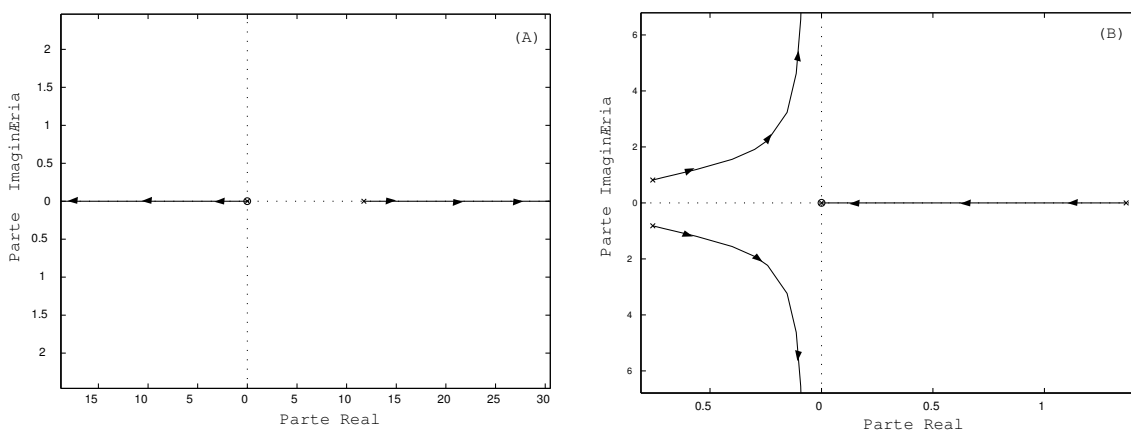


Figura 4.7: Diagrama do Lugar das Raízes (*root locus*). (A) Diagrama do modelo  $\alpha$  e (B) diagrama do modelo  $\beta$ .

No caso da FT do modelo  $\beta$  percebemos ao visualizar o seu diagrama que há uma possibilidade de se trabalhar parâmetros neste sistema de modo a alocar todas as suas raízes

no SPE, e apesar do conjugado complexo P2 e P3 (Tabela 4.1) se limitar seu avanço em relação ao eixo real devido a assíntota localizada aproximadamente em -1. Isso faz com que o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  se eleve, o que não é adequado ao tipo de sistema. Quanto mais próximo de zero se aproxima o coeficiente de amortecimento  $\zeta$ , maior a oscilação na resposta transitória. Este comportamento oscilatório não é adequado ao sistema em questão, pois uma amplitude muito grande dificultaria a estabilização do sistema. No entanto, a escolha de um ganho que desloque as raízes para o SPE, nos dá a possibilidade de estabilização do sistema. No caso da FT do modelo  $\alpha$ , os pólos (raízes da equação característica) se afastam da origem, indicando que mesmo com compensadores proporcionais (inclusão de um ganho de realimentação diferente de 1 ou um ganho puramente proporcional) não são capazes de tornar o sistema estável. Para este caso, há a necessidade de se projetar um controlador específico.

### Seleção do ponto ganho proporcional

Como visto nos itens anteriores, a resposta transitória depende da localização dos pólos em malha fechada. Variando-se o ganho de malha do sistema, tem-se toda gama de locais possíveis para a localização destes pólos. Essa é a idéia do Diagrama de Root Locus, desenvolvido por W.R. Evans. Utilizando este método, se pode prever a variação de ganho em malha aberta modificando os pólos em malha fechada. E em um sistema de controle linear, o método indica o modo pelo qual pólos e zeros devem ser modificados, respeitando certas condições (no caso deste serão o coeficiente de amortecimento e a freqüência natural não-amortecida).

Como citado acima, o método indica um meio de localização dos pólos, sendo possível adequar a resposta a um conjunto de requisitos dinâmicos que sejam satisfatórios para o sistema. No caso deste, estes requisitos serão o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  e a freqüência natural não-amortecida  $\omega_n$ , pois estes, combinados, podem determinar uma resposta satisfatória para um sistema de segunda ordem. Após sucessivos testes empíricos, os valores encontrados foram  $\zeta = 0,4$  e  $\omega_n = 2$ . A combinação destes coeficientes gera a resposta ao degrau unitário desejada para o sistema, apresentado na figura 4.8:

Uma das aplicações do gráfico de Root Locus é poder determinar um ganho proporcional (usado por exemplo em controladores tipo PID). Este ganho pode ser determinado a partir da escolha do coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) e da freqüência natural não-amortecida

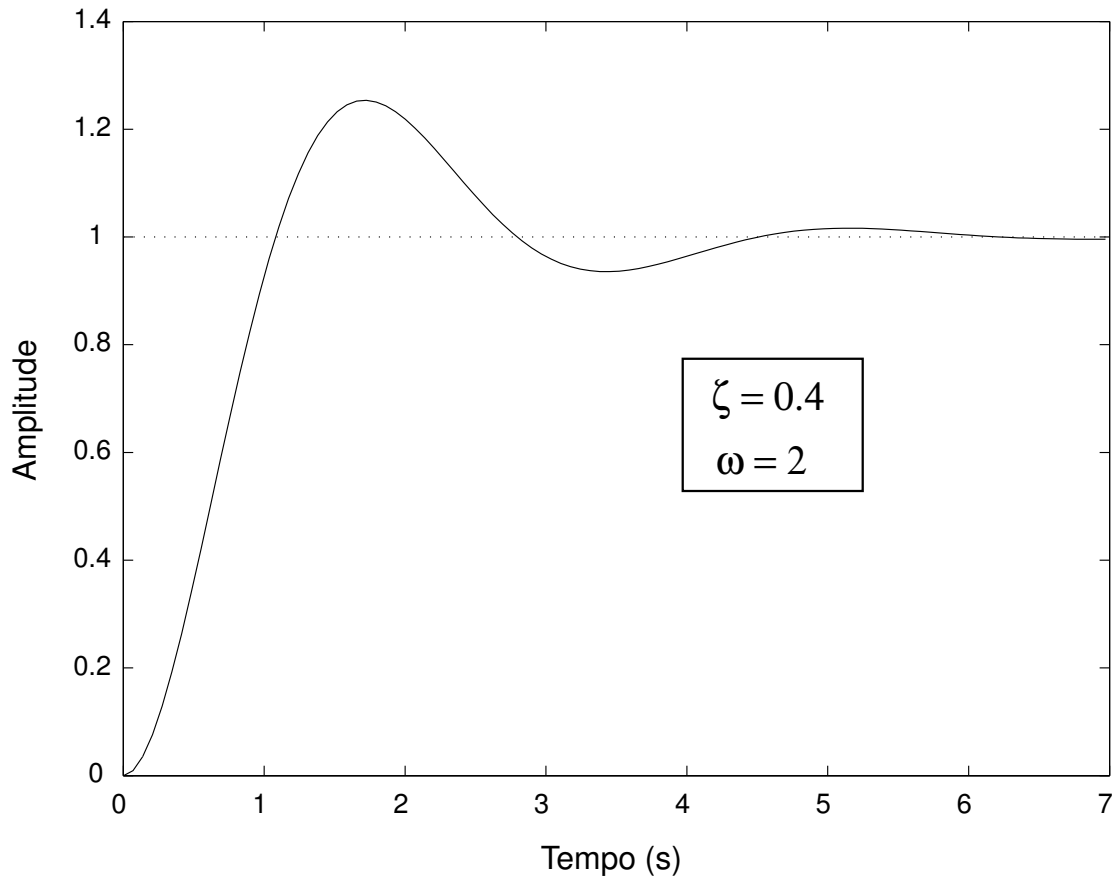


Figura 4.8: Resposta transitória a entrada degrau unitário. Resposta referência para o sistema pêndulo invertido definida pelos coeficientes  $\zeta = 0.4$  e  $\omega_n = 2$

( $\omega_n$ ) desejados para o sistema ser controlado. Uma função do software Matlab facilita o cálculo deste ganho. Esta função faz com que círculos de raio  $\omega_n$  e retas anguladas de acordo com  $\zeta$  sejam traçadas na mesma figura que o gráfico de Root Locus. Isso é possível porque no plano complexo o coeficiente de amortecimento pode ser expresso em termos do ângulo medido em relação ao eixo real negativo. O comando em Matlab que realiza a função citada é *sgrid*. Portanto, para obter o ganho proporcional referente aos dados acima, basta apontar o lugar da interseção do coeficiente de amortecimento com a frequência natural amortecida desejado. A figura 4.9 apresenta a aplicação da função *sgrid* para a determinação do ganho proporcional considerando a resposta de referência definida com  $\zeta = 0.4$  e  $\omega_n = 2$ . As regiões delimitadas pelo semi-circulo e segmentos de reta pontilhados indicados pelos valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  permitem a escolha segundo de um valor de ganho satisfatório.

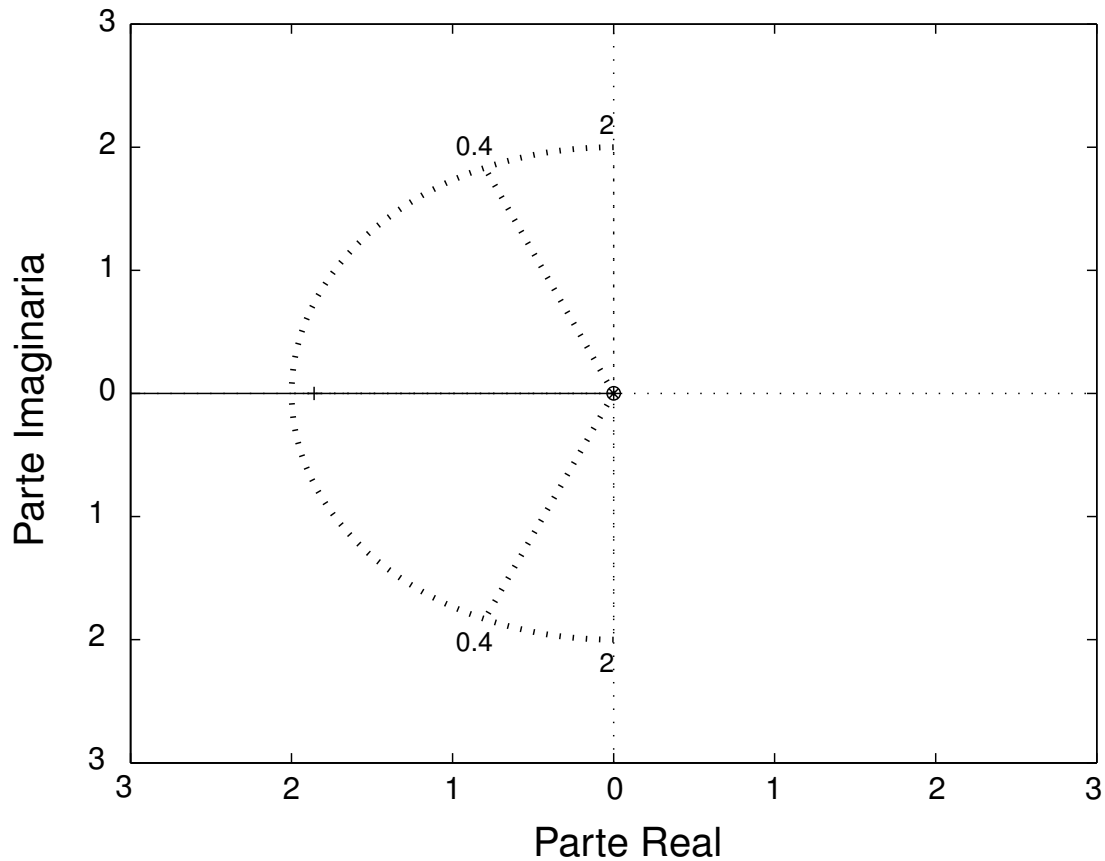


Figura 4.9: Região limite no diagrama de root locus para a resposta de referência para o sistema pêndulo invertido definida pelos coeficientes  $\zeta = 0.4$  e  $\omega_n = 2$

## 4.4 Análise de Estabilidade

Uma observação relevante presente em [5] define que a estabilidade ou instabilidade de um sistema não depende da entrada nele aplicada. Ela é uma propriedade do próprio sistema.

Analisando as FT dos modelos  $\alpha$  e  $\beta$  em MA e MF pode-se constatar a presença de pólos no SPD. Isto por si só já é um indicativo de instabilidade, mesmo após a realimentação unitária. Um método matemático eficiente de verificação de estabilidade absoluta é o chamado critério de Routh-Hurwitz. A sua principal vantagem é possibilitar a classificação de um sistema como instável ou estável, sem que seja necessário computar os pólos e zeros da FT após a realimentação. Apesar de que as ferramentas computacionais do Matlab já possibilitem as definições de pólos e zeros em MF com precisão, será apresentado na próxima seção a análise de estabilidade utilizando Routh-Hurwitz, um complemento a análise de resposta transitória

#### 4.4.1 Critério de Routh-Hurwitz da FT em MF do modelo $\alpha$

O Critério de Routh-Hurwitz assegura que o número de raízes com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da primeira coluna do arranjo de Routh. Então, a condição necessária e suficiente para o sistema ser estável, é que todos os elementos da primeira coluna tenham o mesmo sinal.

Pode-se considerar quatro casos:

1. Nenhum elemento da primeira coluna é nulo.
2. Há um zero na primeira coluna, porém alguns elementos na linha que ocorre o zero são não nulos.
3. Há um zero na primeira coluna e todos os elementos na linha que ocorre o zero são também nulos.
4. Caso anterior, com raízes múltiplas no eixo imaginário.

$$\begin{array}{l|ll} S^2 & a_2 & a_0 \\ S^1 & a_1 & 0 \\ S^0 & b_1 & 0 \end{array}$$

em que  $b_1 = \frac{a_1 a_0 - a_2}{a_1}$

Tomando o polinômio característico da FT em MF do modelo  $\alpha$  dado por:

$$q(s) = s^2 - 11.74s \quad (4.8)$$

O arranjo de Routh para a FT em MF do modelo  $\alpha$  fica:

$$\begin{array}{l|ll} S^2 & 1 & 0 \\ S^1 & -11.74 & 0 \\ S^0 & 11.74 & 0 \end{array}$$

A mudança de sinal na primeira coluna já define que há raízes com parte real positiva, logo, o sistema é instável.

#### 4.4.2 Análise da estabilidade segundo o critério de Routh-Hurwitz da FT em MF do modelo $\beta$

O polinômio característico do critério de Routh para sistemas de terceira ordem é:

$$q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (4.9)$$

em nosso caso o polinômio característico da FT em MF do modelo  $\beta$  é:

$$q(s) = s^3 + 0.1468s^2 - 0.7617s - 1.694 \quad (4.10)$$

O arranjo de Routh é:

$$\begin{array}{l|ll} S^3 & a_3 & a_1 \\ S^2 & a_2 & a_0 \\ S^1 & b_1 & 0 \\ S^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

Sendo que:

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} \text{ e } c_1 = \frac{b_1 a_0}{b_1} = a_0 \quad (4.11)$$

Logo, o arranjo de Routh para a FT do modelo  $\beta$  é:

$$\begin{array}{l|ll} S^3 & 1 & -0.762 \\ S^2 & 0.147 & -1.694 \\ S^1 & -2.37 & 0 \\ S^0 & -1.69 & 0 \end{array}$$

Percebemos também neste modelo a instabilidade do sistema, explícita no item  $b_1$  e  $c_1$  do arranjo acima pela inversão do sinal, o que pode ser confirmado conferindo a parte real positiva nos pólos do sistema mostrados na tabela 4.3.

Com isso, fecha-se o estudo dos métodos de análise de características do sistema, úteis para o projeto de controladores. O próximo capítulo apresentará o desenvolvimento de simulação da construção de controladores para o sistema pêndulo invertido.

# Capítulo 5

## Projeto dos Controladores

Dada a importância industrial dos controladores, fez-se necessário um capítulo apenas para este propósito. Neste capítulo será apresentado o restante do processo para o projeto de controladores. Após as etapas de modelagem matemática e análise de resposta e estabilidade dos dois modelos para o sistema Pêndulo Invertido apresentados, inicia-se o Projeto de Controladores por Função de Transferência. Nesta etapa, serão descritos os métodos de projeto e implementação para cada modelo físico apresentado no Capítulo 3. A abordagem de projeto de controle será basicamente fundamentada na aplicação de ações Proporcionais (P), Integrais (I) e derivativas (D), sendo possíveis combinações de ações PI, PD e PID, tanto em série, como em paralelo.

### 5.1 Projeto de Controladores por Função de Transferência

Existem outras abordagens para projeto de controladores, tais como o Projeto de Controladores por Espaço de Estados, com os métodos Alocação de Pólos e Regulador Quadrático Ótimo. Existem ainda métodos ideais para casos onde a modelagem matemática se torna complexa, em que se pode utilizar controladores construídos por Redes Neurais, técnica que pertence ao chamado Controle Adaptativo.

O controlador é um dispositivo físico, implementável por hardware e/ou software com a função de garantir que variações nas entradas de um processo não interfiram, em demasia, no processo, ou seja, nas saídas do processo. A rigor, deveria sempre ser uma unidade de correção eficiente de erros determinísticos e aleatórios. Pode-se projetá-los a partir

da modelagem matemática do sistema e escolha de uma metodologia de implementação (como as citadas anteriormente). Basicamente estas abordagens se dividem em análises no domínio da frequência, no domínio do tempo e as chamadas mistas ou contemporâneas, tais como as que aplicam redes neurais artificiais e lógica fuzzy (nebulosa). Pode se ainda implementá-los sem que seja necessário determinar um modelo matemático para o sistema, utilizando métodos chamados empíricos. Estes casos se aplicam para situações em que a modelagem do sistema é inviável técnica ou economicamente e se dispõe de facilidades para realizar testes não destrutivos.

Os controladores utilizados neste trabalho serão os PID Série e PD paralelo. A escolha destes se deve ao tipo de sistema que se está desenvolvendo. Neste caso, a utilização da função derivativa é trivial, pois é necessária a correção do erro proporcionalmente à velocidade na qual o erro aumenta. A ação integral corrige o erro estacionário, aquele ocorrido quando o sistema estabiliza na posição diferente da referencial (erro denominado *Off-set*). Sua colocação no sistema pode ser facultada, caso não se necessite de um controle mais rígido de posição do carro na posição central do trilho. Na metodologia utilizada o valor do ganho proporcional foi determinado utilizando Diagrama de Root Locus (presente no Capítulo 4), e encontrar valores dos ganhos derivativo e integral, usando meios empíricos, “de tentativa e erro”, até que uma resposta adequada seja encontrada.

A seguir serão apresentados os projetos dos controladores. Como o método para a obtenção do controle é a mesma para todas as modelagens, optou-se por descrever apenas no primeiro modelo essa metodologia, e no outro apenas as equações e os resultados obtidos, devido às questões de redundância.

## 5.2 Controladores para os Modelos $\alpha$ e $\beta$

A função de transferência tem a seguinte equação (demonstrada no Capítulo 3):

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-0.9649}{s^2 - 11,7378s} \quad (5.1)$$

A FT dos controladores serão colocadas em série com a FT do sistema modelado, e realimentadas para que o controlador possa receber o valor do erro da saída e corrigi-lo caso necessário. O diagrama de blocos mostrado na figura 5.1 explica o que foi citado:



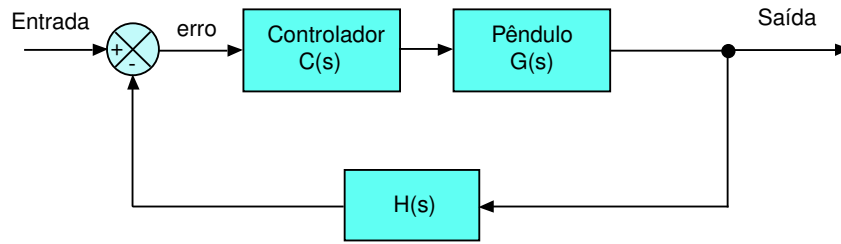


Figura 5.1: Diagrama de blocos do sistema realimentado e controlador. Neste diagrama,  $C(s)$  representa a função de transferência do controlador e  $G(s)$  a função de transferência do pêndulo invertido.

No diagrama,  $G(s)$  representa a função de transferência do pêndulo invertido e  $C(s)$  representa a função de transferência de cada um dos controladores projetados.

### 5.2.1 Algoritmo PD Paralelo

Este controlador tem a seguinte função de transferência:

$$C_{PD}(s) = k_P \cdot s + k_D \quad (5.2)$$

onde  $k_D$  é o ganho derivativo e  $k_P$  é o ganho proporcional.

Para o modelo  $\alpha$ , os ganhos foram definidos como:  $k_P = 25$  e  $k_D = 35$ . O ganho proporcional foi definido por análise do lugar das raízes e o derivativo foi obtido por tentativa e erro. A função de transferência para o modelo  $\alpha$  fica então:

$$C_{PD\alpha}(s) = 25s + 35 \quad (5.3)$$

A multiplicação da  $C(s)$  com a  $G(s)$ , e em malha fechada, para este caso (modelo  $\alpha$ ), resulta em:

$$F_{PD\alpha}(s) = \frac{34s + 25}{s^2 + 22s + 25} \quad (5.4)$$

Para o modelo  $\beta$ , os ganhos foram definidos como:  $k_P = 55$  e  $k_D = 100$ . O ganho proporcional foi definido por análise do lugar das raízes e o derivativo foi obtido por tentativa e erro. A função de transferência para o modelo  $\beta$  fica então:

$$C_{PD\beta}(s) = 55s + 100 \quad (5.5)$$

A multiplicação da  $C(s)$  com a  $G(s)$ , e em malha fechada, para este caso (modelo  $\beta$ ), resulta em:

$$F_{PD\beta}(s) = \frac{6.8s^2 + 3.7s}{s^3 + 7s^2 - 4.6s - 1.7} \quad (5.6)$$

Ao aplicar uma entrada degrau unitário ao sistema controlado obteve-se as respostas transitórias apresentadas na figura 5.2

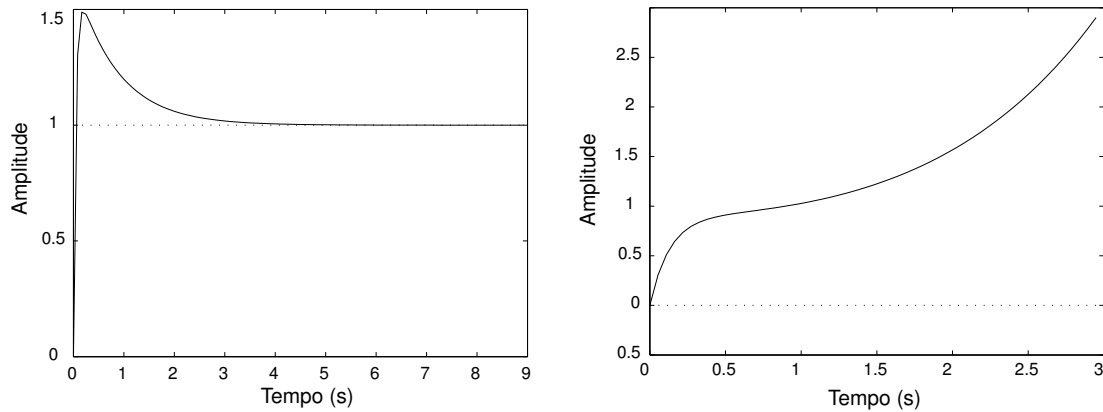


Figura 5.2: Respostas transitórias do sistema pêndulo invertido após atuação de um controlador tipo PD: (A) Modelo  $\alpha$  e (B) modelo  $\beta$ .

A atuação do controlador tipo PD não se mostrou satisfatória para ambos modelos. Entretanto, para o modelo  $\alpha$ , que teoricamente possui uma modelagem com maiores aproximações e, portanto mais simples, a atuação do controlador fez com que a haste retornasse à posição desejada. Entretanto, ocorreu um overshoot de aproximadamente 50% e o tempo de estabilização foi relativamente alto (aprox. 2 segundos). Com esse nível de overshoot muito provavelmente o sistema não conseguiria ser controlado na prática. Para o modelo  $\beta$ , percebe-se que a atuação do controlador não conseguiu anular a ação dos pólos no SPD presentes no sistema em MF. Nota-se que no início da resposta, até 0.5segundos o sistema é levado a posição ideal, sendo que a partir deste ponto, o sistema se comporta como instável. Em uma análise mais criteriosa, pode se levantar a possibilidade de que mesmo com esta resposta transitória, na prática este controlador consiga manter ereta a haste do pêndulo. A única observação contrária é a forte possibilidade de que esta ação de controle não seja robusta, ou seja, susceptível a perda da ação de controle com a presença de uma perturbação mínima.

## 5.2.2 Algoritmo PID série

Este tem a seguinte função de transferência:

$$F(s) = \frac{k_D \cdot s^2 + k_P \cdot s + k_I}{s} \quad (5.7)$$

Onde:  $k_I$  é ganho da ação integral.

Para o modelo  $\alpha$ , os ganhos foram definidos como:  $k_P = 25$ ,  $k_D = 300$  e  $k_I = 50$ . O ganho proporcional foi definido por análise do lugar das raízes, enquanto o derivativo e o integral foram obtidos por tentativa e erro. A função de transferência para o modelo  $\alpha$  fica então:

$$C_{PID\alpha}(s) = \frac{300s^2 + 26s + 50}{s} \quad (5.8)$$

A multiplicação da  $C(s)$  com a  $G(s)$ , e em malha fechada, para este caso (modelo  $\alpha$ ), resulta em:

$$F_{PID\alpha}(s) = \frac{390s^2 + 25s + 48}{s^3 + 277s^2 + 25s + 48} \quad (5.9)$$

Para o modelo  $\beta$ , os ganhos foram definidos como:  $k_P = 55$ ,  $k_D = 400$  e  $k_I = 1000$ . O ganho proporcional foi definido por análise do lugar das raízes e o derivativo foi obtido por tentativa e erro. A função de transferência para o modelo  $\beta$  fica então:

$$C_{PD\beta}(s) = \frac{400s^2 + 55s + 1000}{s} \quad (5.10)$$

A multiplicação da  $C(s)$  com a  $G(s)$ , e em malha fechada, para este caso (modelo  $\beta$ ), resulta em:

$$F_{PD\beta}(s) = \frac{27s^2 + 3.7s + 68}{s^3 + 27s^2 + 3s + 66} \quad (5.11)$$

Ao aplicar uma entrada degrau unitário ao sistema controlado obteve-se as respostas transitórias apresentadas na figura 5.3

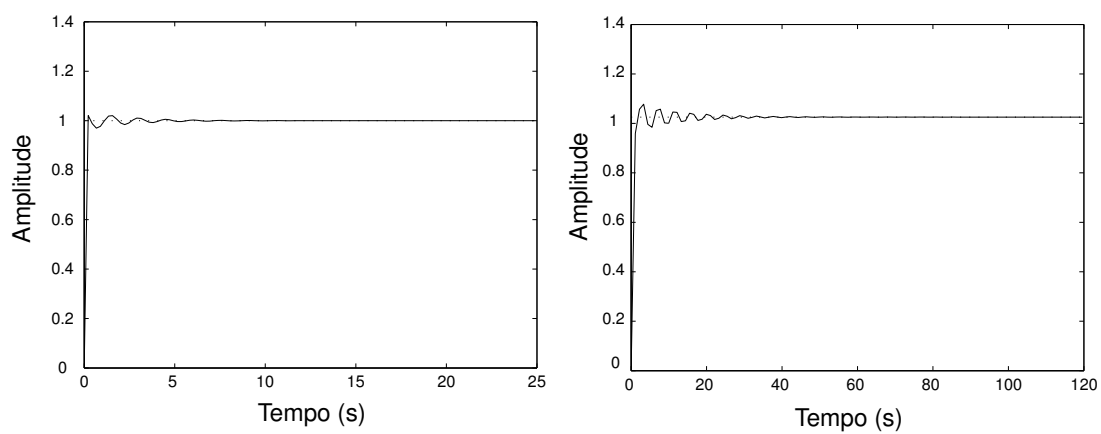


Figura 5.3: Respostas transitórias do sistema pêndulo invertido após atuação de um controlador tipo PID: (A) Modelo  $\alpha$  e (B) modelo  $\beta$ .

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, foi apresentado diferentes modelagens matemáticas para o sistema dinâmico conhecido como Pêndulo Invertido. Foram propostos dois tipos de modelagem matemática para o sistema, em crescentes níveis de complexidade e foi realizada uma análise da resposta transitória de cada modelo desenvolvido, utilizando técnicas do controle clássico. Pôde-se observar que o detalhamento na etapa de modelagem matemática pode influenciar na eficiência e performance do controlador.

O exemplo do pêndulo invertido foi considerado por ser uma aplicação prática conhecida em Teoria de Controle, e que depende de um amplo aparato computacional para sua realização, deixando assim o trabalho em caráter multidisciplinar. A divisão dos capítulos foi de acordo com os passos seguidos para um projeto de um controlador genérico, deixando essa literatura como uma possível base para futuros estudantes que estão iniciando seus estudos em Teoria de Controle.

Para os interessados em um estudo mais aprofundado deste sistema, a construção de outros sistemas de hardware/software que implementem os resultados apresentados é desafiador. Como também um estudo mais detalhado usando Modelagem por Espaço de Estados, entre outras tecnologias já citadas.

Uma questão importante, e que foi um dos objetivos do trabalho, é a comparação de diferentes modelagens para o pêndulo e suas respectivas respostas sob algoritmos de controle. Neste aspecto, pode-se dizer que a etapa de modelagem é definitiva para se obter sucesso no controle do sistema. Pelo que se pode observar dos resultados anteriores, a ação do controlador é limitada fortemente por limitações na modelagem, como por exemplo o modelo  $\alpha$ . Este modelo, por ter um desenvolvimento menos criterioso não permitiu que se

pudesse obter o controle satisfatório no caso do controlador PD.

Em resumo, apesar do trabalho ter sido desenvolvido por simulações computacionais, pôde-se perceber que uma modelagem matemática criteriosa e a análise do comportamento dinâmico do modelo é de fundamental importância na etapa de implementação do controlador, podendo além de permitir respostas rápidas e precisas, reduzir custos de uma possível implementação em hardware para fins industriais.

# Apêndice A

## Programas de Simulação em Matlab

Durante a apresentação do trabalho, foram mostrados apenas os resultados gráficos finais do estudo sobre Projeto de Controladores, o intuito deste anexo é mostrar as linhas de código que foram utilizadas para esta construção. Estão contidos também alguns comentários pertinentes a cada fase do processo.

1) Função de Transferência do modelo  $\alpha$ :

%função em malha aberta:

```
num=[0 0 -0.9649 0 0];
```

```
den=[1 -11.7378 0 0 0];
```

```
f=tf(num,den);
```

%diagrama de polos e zeros em malha aberta:

```
figure(1)
```

```
zplane(num,den)
```

```
title('diagrama de polos e zeros da FT em malha aberta')
```

```
xlabel('Parte Real')
```

```
ylabel('Parte Imaginaria')
```

```
pma = roots(den)
```

%resposta ao degrau unitario:

```
figure(2)
```

```
step(f)
```

```
title('resposta ao degrau unitario da FT em malha aberta')
```

```
xlabel('Tempo(seg)')
```

```
ylabel('Amplitude')
```

```

%-----
%função em malha fechada:
fmf=feedback(f,1);
num1=[0 0 -0,9649 0 0];
den1=[1 -11.7378 -0.9649 0 0];
%Polos e zeros em malha fechada:
figure(3)
zplane(num1,den1)
title('diagrama de polos e zeros da FT em malha fechada')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
pmf = roots(den1)
zmf = roots(num1)
%-----

%resposta ao degrau unitario:
figure(4)
step(fmf)
title('resposta ao degrau unitario da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
%-----

%função IMPULSO:
num2=[1 0];
den2=[0 1];
i=tf(num2,den2);
fmfi=fmf*i;
%resposta ao impulso unitario:
figure(5)
step(fmfi)
title('resposta ao impulso unitario da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')

```



```

%-----
%função RAMPA:
num3=[0 1];
den3=[1 0];
r=tf(num3,den3);
fmfr=fmf*r;
%resposta a rampa unitaria:
figure(6);
step(fmfr)
title('resposta a rampa unitaria da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
%-----
%função senoidal unitaria (w=1):
num4=[0 0 1];
den4=[1 0 1];
s=tf(num4,den4);
fmfs=fmf*s*i;
%resposta ao seno unitario:
figure(7)
step(fmfs)
title('resposta ao seno unitario da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
%-----
%testes para verificação de Zeta e Wn.
w=2;
z=0.4;
numv=[0 0 w*w];
denv=[1 2*z*w w*w];
fv=tf(numv,denv);
figure(8)

```

```

step(fv)
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude') title('Grafico da resposta desejada')
%valores requeridos: Zeta=0.4 e Wn=2
%Root Locus
figure(9)
rlocus(num,den);
title('grafico do Root Locus')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
sgrid(z,w)
v=[-3 3 -3 3];axis(v);axis('square')
[k, r]=rlocfind(num,den)
%ganho encontrado: 25.8816
%_____
%projeto do controlador com algoritmo PD paralelo
kpp=25.8816;
kdp=35;
num7=[kdp kpp];
den7=[0 1];
pdp=tf(num7,den7);
gmap=f*pdp;
gmfp=feedback(gmap,1);
figure(10)
step(gmfp)
title('degrau na FT com PD paralelo')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
% RESULTADOS COM ALGORITMO PD PARALELO
%Tempo morto= 0 seg
%Constante de Tempo= 0.0972 seg
%Tempo de subida= 0.149 seg %Overshoot Máximo= 71% em 0.358 seg

```

%Estabilização=Aproximadamente 1,5 seg, com 27% de off-set.

%-----

%projeto do controlador PID serie:

kps=-25.8816;

kis=-50;

kds=-300;

num10=[kds kps kis];

den10=[0 1 0];

ftpid=tf(num10,den10);

gpid=f\*ftpid;

gmfpid=feedback(gpid,1);

figure(11)

step(gmfpid)

title('degrau na FT com PID Serie')

xlabel('Tempo(seg)')

ylabel('Amplitude')

% RESULTADOS OBTIDOS COM PID SERIE

%Tempo morto = 0 seg

%Constante de tempo = 0.0256 seg

%Tempo de subida = 0.076 seg

%Overshoot Máximo = 17% em 0.422 seg

%Estabilização = em 2,1 seg

2) Função de Transferência do modelo  $\beta$ :

%função de transferencia - Modelo BETA

%função em malha aberta:

num=[0 0 0.06823 0 0];

den=[1 0.1468 -0.8299 -1.6944 0];

f=tf(num,den);

%diagrama de polos e zeros em malha aberta:

figure(1)

```

zplane(num,den)
title('digrama de polos e zeros da FT em malha aberta')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
%resposta ao degrau unitario:
figure(2)
step(f)
title('resposta ao degrau da FT em malha aberta')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
pma = roots(den)
zma = roots(num)
%_____
%funcao em malha fechada:
fmf=feedback(f,1);
num1=[0 0 0.06823 0 0];
den1=[1 0.1468 -0.7617 -1.6944 0];
% Diagrama de Polos e zeros em malha fechada:
figure(3)
zplane(num1,den1)
title('diagrama de polos e zeros da FT em malha fechada')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
%resposta ao degrau unitario:
figure(4)
step(fmf)
title('resposta ao degrau da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
pmf = roots(den1)
zmf = roots(num1)
%_____

```

```

%função IMPULSO:
figure(5)
impulse(fmf)
title('resposta ao impulso da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
%-----

%função RAMPA:
num3=[0 1];
den3=[1 0];
r=tf(num3,den3);
fmfr=fmf*r;
figure(6)
step(fmfr)
title('resposta a rampa da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
%-----

%função senoidal unitaria (w=1):
num4=[0 0 1];
den4=[1 0 1];
s=tf(num4,den4);
fmfs=fmf*s*i;
figure(7)
step(fmfs)
title('resposta ao seno da FT em malha fechada')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
%-----

%testes para verificação de Zeta e Wn.
w=2;
z=0.4;

```

```

numv=[0 0 w*w];
denv=[1 2*z*w w*w];
fv=tf(numv,denv);
figure(8)
step(fv)
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
title('Grafico da resposta desejada')
%valores requeridos: Zeta=0.4 e Wn=2
%Root Locus
figure(9)
rlocus(num,den);
title('grafico do Root Locus')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
%sgrid(z,w)
%v=[-3 3 -3 3];axis(v);axis('square')
%[k,r]=rlocfind(num,den)
%ganho encontrado: 54.9857
%_____
%projeto do controlador com algoritmo PD paralelo
kpp=55;
kdp=100;
num7=[kdp kpp];
den7=[0 1];
pdp=tf(num7,den7);
gmap=f*pdp;
gmfp=feedback(gmap,1);
figure(10)
step(gmfp)
title('degrau na FT com PD paralelo')
xlabel('Tempo(seg)')

```

```

ylabel('Amplitude')
% RESULTADOS COM ALGORITMO PD PARALELO
%Constante de Tempo= 0,0123 seg
%Tempo de subida= 0,0237 seg
%Overshoot Maximo= nao ocorre
%Estabilizaco= 0,0237 com 2% de off-set
%-----
%Projeto do Controlador PID serie
kps=54.9857;
kis=1000;
kds=400;
num10=[kds kps kis];
den10=[0 1 0];
ftpid=tf(num10,den10);
gpid=f*ftpid;
gmfpid=feedback(gpid,1);
figure(11)
step(gmfpid)
title('degrau na FT com PID Serie')
xlabel('Tempo(seg)')
ylabel('Amplitude')
% RESULTADOS OBTIDOS COM PID SERIE
%Constante de tempo = 3 seg
%Tempo de subida = 6,15 seg
%Overshoot Mximo = 1% em 28,4 seg
%Estabilizaco = em 3.64 seg

```

## Apêndice B

### Parâmetros do kit didático Pêndulo Invertido - Empresa Feedback



Tabela B.1: Nomes e valores de todos os parâmetros do Kit da Empresa Feedback

Nome	Descrição	Unidade	Valor
$m_c$	massa do carro	[kg]	1.12
$m_{c-}$	massa do carro sem os posicionadores para o pêndulo	[kg]	1.045
$m_{ps}$	massa do poste	[kg]	0.025
$m_{pw}$	massa de carga	[kg]	0.095
$R_l$	comprimento do trilho	[m]	1
$l_p$	comprimento do poste	[m]	0.402
$l_{po}$	distância entre o centro da massa do poste e o eixo de rotação	[m]	0.146
$l_c$	comprimento da carga	[m]	0.041
$l_{co}$	distância entre o centro da massa e do eixo de rotação	[m]	0.347
$r_c$	raio da carga	[m]	0.02
$r_p$	raio da haste	[m]	0.006
$J_{pt}$	Momento de Inércia teórico do pêndulo	[kg.m <sup>2</sup> ]	0.0123321
FS	fricção estática do carro	[N]	2.28133
FC	coeficiente de fricção dinâmica do carro	[kg/s]	2.53165
M	força máxima	[N]	17.463
DZu	força mínima para mover um carro	[N]	1.37918
DZcv	zona morta da velocidade do carro	[m/s]	-0.00793711
DZpv	zona morta da velocidade do pêndulo	[rad/s]	3.37476
$f_p$	constante de fricção do pêndulo	[kg.m <sup>2</sup> /s]	0.000107443
T	período pêndulo	[s]	1.16
$J_p$	momento de inércia relacionado ao eixo de rotação	[kg.m <sup>2</sup> /s]	0.0139231
J	momento de inércia relacionado ao centro de massa	[kg.m <sup>2</sup> ]	0.0135735
l	distância entre o eixo de rotação do pêndulo e o centro de massa do pêndulo-carro	[m]	0.0167903

# Apêndice C

## Cálculos das amplitudes do Pêndulo

### Cálculos das amplitudes do Pêndulo

Por questões de curiosidade, algumas relações métricas foram feitas no aparato do pêndulo. Entre elas:

1) Uma volta completa da haste do pêndulo: amplitude = 6 (Este valor "6" é fixado pelo fabricante do Módulo do Pêndulo, a Empresa Feedback).

2) Como a haste do pêndulo mede 0.402 metros, o comprimento da circunferência percorrida em uma volta é de:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 0.402 \rightarrow C = 2.5257 \text{ metros.}$$

3) O pêndulo percorre a distancia de 0.007 metros para cada 1 grau (ou 0.017 radianos).

Se amplitude = 6 à 2.5257 metros à 360° à 2\* $\pi$  radianos

Então amplitude = 1 à 0.4209 metros à 60° à  $\pi/3$  radianos

4) Cálculo para a amplitude do carro: a amplitude de 0.825 equivale para toda a medida da base.

# Apêndice D

## Projeto dos Controladores por Espaço de Estados

O intuito desta parte do capítulo é tratar da construção dos controladores para o sistema usando uma outra técnica, onde uma nova maneira de tratar a modelagem matemática influencia no resultado final do processo. No Capítulo obteve-se o projeto dos controladores usando Função de Transferência. Neste apêndice abordaremos o projeto por Espaço de Estados, mais precisamente o projeto de controle por Alocação dos Pólos, que é semelhante ao método do Lugar das Raízes, normalmente usado na análise da Resposta em Frequência. No entanto, há algumas diferenças entre estes métodos, uma delas é que na Alocação de Pólos modificam-se todos os pólos do sistema, enquanto que no Lugar das Raízes movem-se somente aqueles considerados perturbadores (semiplano direito). Outra questão relevante para este tipo de controlador é que ele só pode ser utilizado em sistemas que sejam completamente controláveis. Para entender essa noção, é necessária a introdução de dois novos conceitos só estudados nesse tipo de abordagem: Controlabilidade e Observabilidade.

- Controlabilidade: um sistema é dito controlável no instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado, num intervalo de tempo finito;
- Observabilidade: um sistema é dito observável no instante  $t_0$  se, com o sistema no estado  $x(t_0)$ , for possível determinar esses estados a partir da observação da saída durante um intervalo de tempo finito.

Basicamente a ação deste tipo de controle consiste em modificar os pólos originais do sistema através da realimentação das variáveis de estado, multiplicando-as por um ganho  $K$ , de modo que, após a realimentação os pólos desejados sejam as saídas do sistema, fazendo-o assim, ficar controlado. Há toda uma ferramenta matemática que demonstra o modo de encontrar estes valores de  $K$ , no entanto, por fugir do tema central do trabalho e por já existirem ferramentas computacionais que facilitam o cálculo destes valores, este trabalho matemático será omitido. Consulte [1] para maiores detalhes.

O método de se encontrar os pólos desejados é através do coeficiente de amortecimento e frequência natural não amortecida que satisfação às condições ideais para o funcionamento do sistema. Para este modelo consideraremos  $\zeta=2.5$  (coeficiente de amortecimento) e  $\omega_n=10$  (frequência natural não-amortecida). Como o sistema é de quarta ordem, serão escolhidos mais dois pólos reais e distantes da origem, do semiplano esquerdo, de modo que a presença deles não influencie na resposta.

Os pólos escolhidos foram:

$$p_1=-47,9129$$

$$p_2=-2,0871$$

$$p_3=-100$$

$$p_4=-100$$

Com estes pólos será feito todo o estudo relativo à Modelagem por Espaço de Estados, de modo que a escolha aleatória dos pólos não influencie na complexidade dos controladores.

Com estes pólos o sistema responderá da seguinte forma:

Que é uma resposta satisfatória para o sistema em questão.

Há duas formas de se obter a matriz de realimentação  $K$  de saída: Método de Substituição Direta ou pela Fórmula de Ackermann.

### D.0.3 Método de Substituição Direta

Uma seqüência de passos pode ser seguida para encontrar a matriz de ganho de realimentação  $K$ .

1. Dada as matrizes  $A$  e  $B$  (Matriz de Estado e Matriz de Entrada, respectivamente), encontrar o polinômio característico da Matriz de Estado  $A$  usando o comando do Matlab  $poly(A)$ .

2. Se a Matriz de Estado tem ordem  $(n)$ , o polinômio característico tem  $(n+1)$  coeficientes, onde geralmente o primeiro coeficiente é 1. Então, retira-se este primeiro coeficiente (de valor unitário) e consideram-se apenas os restantes.
3. Encontra-se a Matriz de Controlabilidade do sistema.
4. Outra matriz é montada com os coeficientes do polinômio característico da Matriz de Estado.
5. É encontrada uma Matriz de Transformação  $T$ , que é a multiplicação da Matriz de controlabilidade com a Matriz dos Coeficientes do polinômio característico.
6. Em paralelo, monta-se outra Matriz ( $J$ ), de mesma ordem quantos forem os pólos desejados em malha fechada. Como temos quatro pólos, teremos uma matriz  $4 \times 4$ , montada na mesma característica da matriz identidade, só que, no lugar dos "1", colocam-se os pólos.
7. Encontram-se os coeficientes dessa matriz dos pólos desejados utilizando o mesmo comando  $poly(A)$ .
8. A Matriz de Ganho de Realimentação é obtida pela diferença entre os coeficientes do polinômio característico dos pólos em malha fechada e os coeficientes do polinômio característico da Matriz de Estado  $A$ .

#### D.0.4 Método da Fórmula de Ackermann

Neste método, é usada a fórmula de Ackermann. Em comparação ao método anterior, este é mais simples, pois não são necessários alguns passos seguidos pelo Método da Substituição Direta, e um comando do Matlab já executa os cálculos necessários que agilizam o trabalho para encontrar os valores da Matriz de Ganho de Realimentação. Segue abaixo uma seqüência de passos.

1. Dadas as Matrizes de Estado e as Matrizes de Entrada do sistema, encontrar a Matriz de controlabilidade.
2. Verificar o posto da Matriz de Controlabilidade, para demonstrar a condição trivial para o projeto de controle por alocação de pólos, que é o completo controle sobre o

sistema (sistema completamente controlável). Esta verificação é feita com o comando *rank* do Matlab.

3. Fazer a Matriz dos pólos desejados e encontrar os coeficientes do seu polinômio característico.
4. Utilizar o comando  $\text{polyvalm}(\text{poly}(J), A)$ , que faz a avaliação de matriz polinomial entre o polinômio característico da matriz dos pólos desejados e a Matriz de Estado do sistema.
5. A Matriz de Ganho de Realimentação é encontrada de acordo com a fórmula  $k = [0 \ 0 \ 0 \ 1] * \text{inv}(m) * f_i$ , onde  $\text{inv}(m)$  é a matriz inversa da Matriz de Controlabilidade e  $f_i$  é o resultado do passo 4 descrito acima.

No Anexo A são encontrados os programas em Matlab onde são aplicados estes métodos sobre as Matrizes de Estado e Matrizes de Entrada das duas modelagens apresentadas anteriormente.

Como era de se esperar, as Matrizes de Ganho de Realimentação dos dois métodos são iguais, já que se está considerando as mesmas matrizes de Entrada e Estado, e os mesmos pólos desejados em malha fechada.

## D.1 Análise do Modelo Simulink

Neste item será apresentado o modelo implementado para testes no sistema do Pêndulo Invertido. Este modelo foi fabricado pela Empresa Feedback, e segue juntamente com o módulo estudado, também fabricado pela mesma empresa. É um modelo construído no Simulink/Matlab com a intenção de mostrar o funcionamento computacional do sistema, apresentando todos os blocos, todas as variáveis, todas as ligações necessárias. Segue também, junto ao módulo, o Manual de Funcionamento que explica cada bloco e suas funcionalidades.

A tela inicial é apresentada na Figura D.1:

Por questões de simplicidade, a partir das cores dos Blocos far-se-á uma análise das funcionalidades destes blocos:

- Blocos Verdes: entrada e saída do sistema, sendo interfaceado com a Placa Advantech PCI1711, que é uma placa de aquisição AD/DA. As duas da esquerda representam

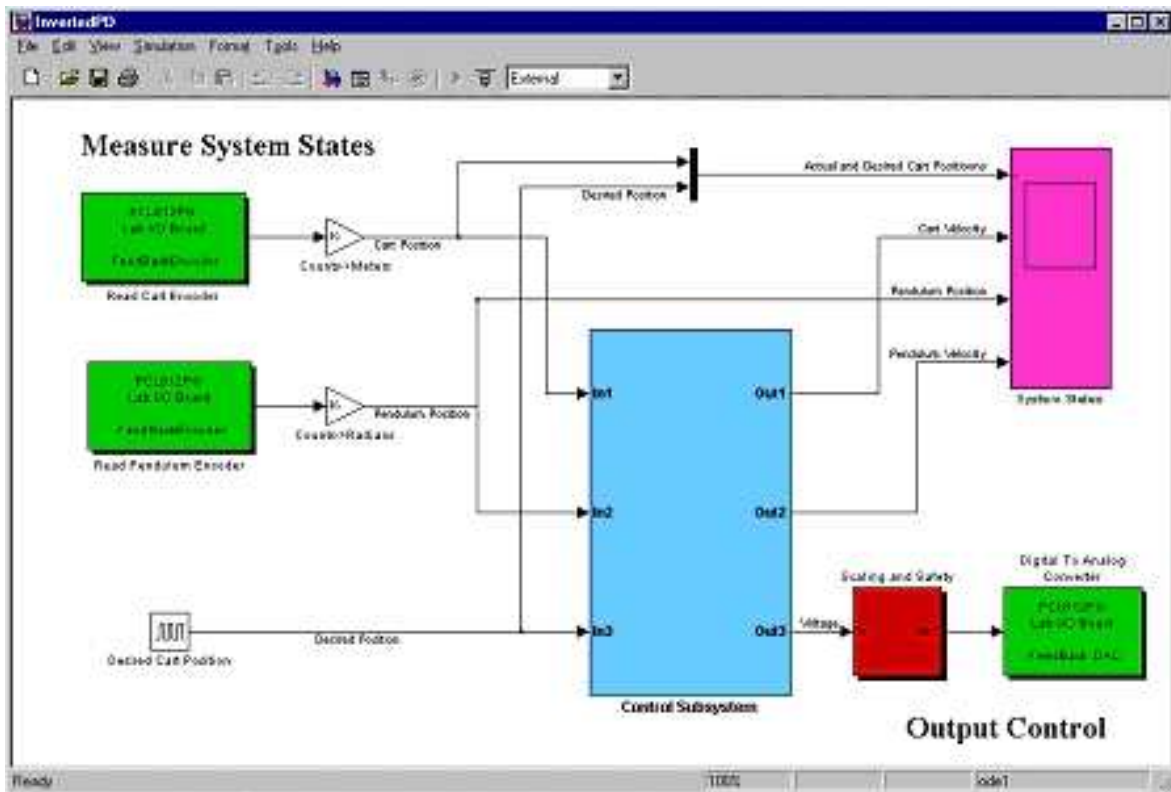


Figura D.1: Tela inicial do modelo Simulink do módulo do Pêndulo Invertido

as entradas, a da direita representa a saída. Sendo que esta diferenciação é usada para meios didáticos e que na prática usa-se apenas uma placa.

- Bloco Magenta: este bloco mostra o comportamento das variáveis durante os testes. Neste são mostradas as velocidades do carro e do pêndulo e suas respectivas posições. Veja que quatro setas chegam neste bloco, sugerindo que cada seta indica uma variável mostrada.
- Bloco Vermelho: bloco onde são configuradas as diretrizes de segurança do sistema.
- Bloco Azul: neste bloco é feito todo o controle do pêndulo, desde a análise das entradas, verificação e correção do erro, até o envio da tensão de correção para o bloco vermelho (segurança) e, em seguida, para o bloco verde (placa I/O).
- Bloco Branco: neste é realizado o gerador de set-point, que é a posição de referência que o sistema deve seguir. A entrada em degrau é realizada quando é modificado o valor do set-point para um outro valor fixo abaixo ou acima do anterior, a partir

daí, verifica-se se o controlador projetado responde adequadamente às necessidades do sistema.

Quando alguma perturbação atinge o pêndulo, há uma mudança na posição do carro para manter a posição angular adequada (perpendicular à base do carro), no entanto, devido ao set-point, o carro deverá voltar à posição que estava anterior à perturbação, fazendo assim mais um teste sobre o controlador, que, além de corrigir a posição angular do pêndulo através da posição do carrinho (correção da perturbação), ainda tem que controlar essa posição novamente para que o carrinho possa voltar a sua posição de referência.

O bloco azul, citado anteriormente, é o controlador do sistema. A Figura D.2 é a tela que aparece quando “entramos” no controlador:

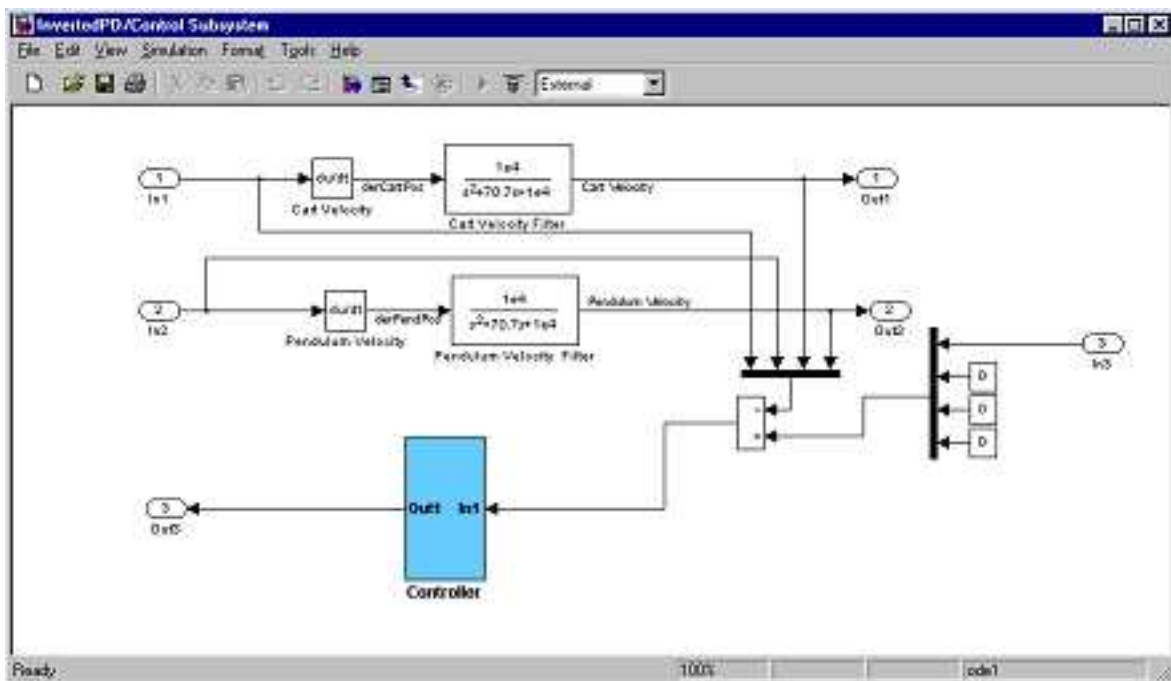


Figura D.2: Tela interna do bloco controlador.

As entradas In1 (posição do carro) e In2 (posição do pêndulo) são derivadas (recurso matemático para encontrar a inclinação da reta tangente ao ponto em questão. Sua aplicação, no caso, se deve ao fato de que a derivada da função relativa à posição de um móvel é a função velocidade deste móvel.), com objetivo de encontrar a velocidade destas variáveis, e gerando assim duas saídas (Out1 e Out2), que seguem para o bloco dos gráficos (Bloco Magenta).



Os resultados das quatro saídas são subtraídos da In3 (relativa ao gerador de set-point) e este resultado é enviado ao controlador (bloco azul, na figura D.2). Este bloco tem a seguinte configuração:

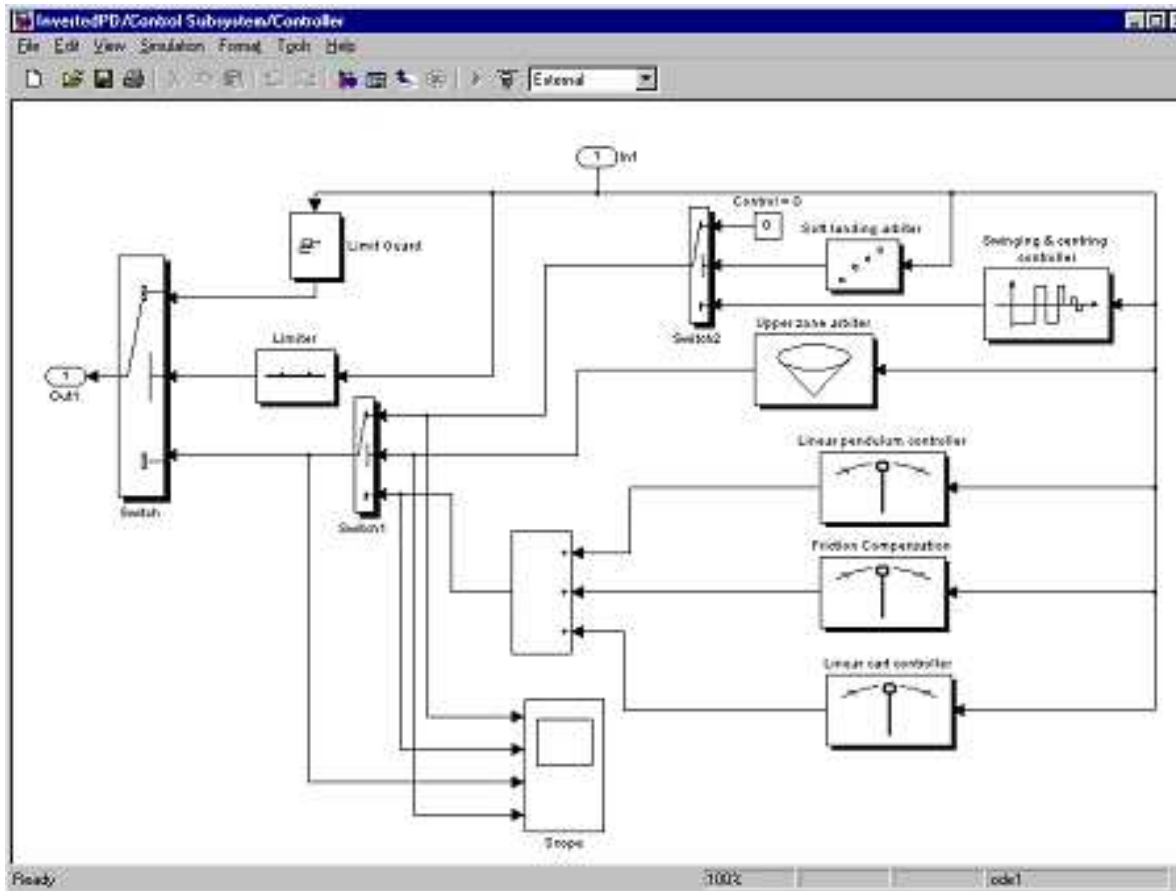


Figura D.3: Entrada da posição do pêndulo e do carro.

Nesta Figura D.3 toda a dinâmica de funcionamento do pêndulo é mostrada, sendo que cada bloco tem sua função característica:

- Bloco Upper Zone Arbiter: determina o ponto no qual o controle de estabilização é acionado, sabendo que este sistema utiliza além deste controle de estabilização, o controle de balanço, como será mostrado a seguir.
- Bloco Soft Landing Arbiter: limitar o balanço do pêndulo de forma que sua energia cinética ao entrar na zona de estabilização seja zero. Para fazer isto, este bloco calcula a energia cinética do pêndulo na sua posição vertical mais baixa e a energia potencial no seu ponto vertical mais alto. Se a energia cinética for maior que a potencial, então o pêndulo girará através do ponto vertical.

- Bloco Limiter: este bloco alterna o controle para o modo de segurança que move o carro na direção contrária ao limite do percurso caso a posição do carro se aproximar destes finais de curso (sensores de contato seco).
- Bloco Swinging & Centring Controller: este bloco move o carro de tal forma que o pêndulo gira próximo à posição de equilíbrio. Linear pendulum controller: bloco que faz o controle da estabilização do pêndulo. Isso ocorre pelo ajuste de parâmetros controladores da oscilação.
- Bloco Friction Compensation: neste bloco o atrito causado pelo contato das rodas do carro com a base é compensado de acordo com um detalhado estudo que não será apresentado neste trabalho por fugir do propósito.
- Bloco Linear Cart Controller: neste bloco é feito o ajuste dos controladores do carro (PD: Proporcional-Derivativo).

O multiplexador que seleciona qual a saída do controlador recebe os sinais referentes a cada situação que pode acontecer no sistema. Inicialmente, quando o sistema é ligado, o pendulo está na posição para baixo, havendo a necessidade do balanço para entrar na zona de estabilização. O algoritmo de estabilização é mostrado no bloco Upper Zone Arbiter. Após esta parte, o bloco pendulum controller é acionado, ativando o algoritmo de estabilização. Caso, por resultado de alguma ação destes algoritmos, algum dos limitadores de final de curso for acionado, a saída será a posição 3 e nenhum dos dois algoritmos acima serão acionados, parando assim o sistema. A função destes limitadores é evitar avarias quando o carro se aproxima do final da base.

# Bibliografia

- [1] Katsuhiko Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall, 4º Edição, São Paulo, 2003.
- [2] The University of Michigan. *Control Tutorials for Matlab®*. [www.engin.umich.edu/group/ctm](http://www.engin.umich.edu/group/ctm), em 01 2005.
- [3] MathWorks. *The MathWorks - MATLAB® and Simulink for Technical Computing*. [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com), em 07 2004.
- [4] Feedback Instruments Ltd. *Controle em um Ambiente MATLAB® - Pêndulo Digital. Manual: 33-000V61, 6*, Junho 2002.
- [5] Robert Bishop and Richard Dorf. *Modern Control System*. Addison Wesley Longman Publishing, 8º Edição, Boston (USA), 1998.
- [6] Feedback Instruments Ltd. *Controle em um Ambiente MATLAB® - Introdução e Instalação dos Sistemas de Computador. Manual: 33-935/936-0V61, 6*, Junho 2002.
- [7] Gene Franklin. *Feedback Control of Dynamics Systems*. Addison Wesley Longman Publishing, 2º Edição, Boston, 1993.
- [8] *Resumo 015/98 de projeto de pesquisa Pronex*. <http://www.cnpq.br/areas/pronex/resumo/exatas/015-98.htm>, em 08 2004.
- [9] Andreas Idbrant and Jan Brugard. *Inverted Pendulum - Basic Examples*. [www.mathcore.com/products/mathmodelica/documents/InvertedPendulum.pdf](http://www.mathcore.com/products/mathmodelica/documents/InvertedPendulum.pdf), em 07 2005.
- [10] Amita Muralikrishna et al. *Implementação de um controlador PID para aplicação no modelo do pêndulo invertido em uma base móvel*. <http://200.231.172.253/cnmac/storal2>, em 07 2005.

[11] Instituto Politécnico Tomar. *Sistema Pêndulo Invertido*. [www.ipt.pt](http://www.ipt.pt), em 02 2005.