

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM  
SISTEMA DE SUSPENSÃO SIMPLIFICADO**

por

ANA CRISTINA REBÉS ALMEIDA

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Álvaro Luiz De Bortoli  
ORIENTADOR

Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes  
CO-ORIENTADOR

Porto Alegre, agosto de 2002.

# SUMÁRIO

RESUMO.....	i
ABSTRACT.....	ii
LISTA DE FIGURAS.....	v
LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
1 – INTRODUÇÃO.....	1
2 –ASPECTOS RELATIVOS À DINÂMICA DE AUTOMÓVEIS.....	7
2.1 Suspensão.....	7
2.2 Tipos de mola.....	8
2.3 Amortecedores.....	9
2.4 Tipos de Suspensão.....	10
2.4.1 Suspensões pneumáticas e hidropneumáticas.....	13
2.5 Trabalhos envolvendo controle de estruturas flexíveis.....	15
2.6 Trabalhos envolvendo dinâmica de automóveis.....	19
3 – MODELOS DINÂMICOS.....	21
3.1 Vibração de sistemas.....	21
3.2 Sistemas com um grau de liberdade.....	21
3.3 Sistemas com dois graus de liberdade.....	23
3.4 Sistemas com três graus de liberdade.....	26
3.5 Soluções analítica e numérica para sistema com dois graus de liberdade.....	30

3.5.1 Solução analítica do modelo de dois graus de liberdade.....	30
3.5.2 Solução numérica do modelo de dois graus de liberdade.....	35
4 - NOÇÕES SOBRE CONTROLE.....	38
4.1 Controlabilidade e observabilidade de um sistema.....	38
4.2 Diagramas de Bode.....	40
4.3 Controle Clássico.....	45
4.3.1 Controle Clássico Projetado.....	47
4.3.2 Controle por alocação de pólos.....	48
4.3.3 Controle ótimo baseado em índices de desempenho quadráticos – LQR.....	53
4.4 Diretrizes auxiliares ao projeto de um sistema de controle.....	56
5 – ANÁLISE DE RESULTADOS PARA SISTEMA COM 3 GRAUS DE LIBERDADE.....	58
5.1 Resultados via controle clássico.....	58
5.2 Resultados via controle por alocação de pólos.....	61
5.3 Resultados via controle LQR.....	66
6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS....	69
7 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	71

## RESUMO

As aplicações da mecânica vibratória vêm crescendo significativamente na análise de sistemas de suspensões e estruturas de veículos, dentre outras. Desta forma, o presente trabalho desenvolve técnicas para a simulação e o controle de uma suspensão de automóvel utilizando modelos dinâmicos com um, dois e três graus de liberdade. Na obtenção das equações do movimento para o sistema *massa-mola-amortecedor*, o modelo matemático utilizado tem como base a equação de Lagrange e a segunda lei de Newton, com condições iniciais apropriadas. A solução numérica destas equações é obtida através do método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, utilizando o *software MATLAB*.

Para controlar as vibrações do sistema utilizou-se três métodos diferentes de controle: clássico, LQR e alocação de pólos. O sistema assim obtido satisfaz as condições de estabilidade e de desempenho e é factível para aplicações práticas, pois os resultados obtidos comparam adequadamente com dados analíticos, numéricos ou experimentais encontrados na literatura, indicando que técnicas de controle como o clássico podem ser simples e eficientes.

## **ABSTRACT**

The applications of vibration mechanics are increasing very much mainly for structures and vehicle suspensions, among others. Therefore, this work develops the numerical simulation of an automobile suspension with control for one, two and three degrees of freedom. To obtain the governing equations of the mass-spring-damper system the mathematical model is based on Lagrange and Newton's second law equations, with appropriate initial conditions. The numerical solution of it is obtained with the fourth order Runge-Kutta method, using the MATLAB software.

Three different methods are employed to vibration control: classic, LQR and poles imposition. Such control system satisfies the stability and performance conditions and is usefull, because obtained results compare properly with analytical, numerical or experimental data found in the literature, indicating that controls such as the classic can be simple and efficient.

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 2.1</b>	Deslocamento lateral do eixo do veículo.....	10
-		
<b>FIGURA 2.2</b>	Sistema de articulação de rodas independentes.....	11
-		
<b>FIGURA 2.3</b>	Sistema massa-mola-amortecedor de 3 graus de liberdade.....	16
-		
<b>FIGURA 3.1</b>	Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade.....	22
-		
<b>FIGURA 3.2</b>	Sistema de suspensão de um automóvel.....	23
-		
<b>FIGURA 3.3</b>	Sistema massa-mola-amortecedor que representa o modelo da roda de um automóvel.....	23
-		
<b>FIGURA 3.4</b>	Modelo de vibração para o movimento angular e vertical de um automóvel.....	24
-		
<b>FIGURA 3.5</b>	Sistema massa-mola-amortecedor para dois graus de liberdade da Fig. 3.4.....	25
-		
<b>FIGURA 3.6</b>	Modelo para sistema de suspensão com três graus de liberdade.....	26
-		
<b>FIGURA 3.7 -</b>	Solução analítica para $x$ e $\theta$ para o modelo de uma camionete.....	34
<b>FIGURA 3.8</b>	Comparação da solução analítica e numérica na direção $x$ .....	37
-		
<b>FIGURA 3.9</b>	Comparação da solução analítica e numérica para o ângulo $\theta$ .....	37
-		
<b>FIGURA 4.1</b>	Diagramas de Bode para sistema com um grau de liberdade, onde $w=2$ e $\xi = 0.05$ , 0.30 e 0.40 .....	40
-		

<b>FIGURA 4.2</b>	Diagrama de Bode para sistema com dois graus de liberdade para o modelo de uma roda de automóvel.....	41
-		
<b>FIGURA 4.3</b>	Diagrama de Bode para a função de transferência $\alpha_{11}(w)$ .....	44
-		
<b>FIGURA 4.4</b>	Diagrama de blocos para um sistema MIMO.....	45
-		
<b>FIGURA 5.1</b>	Ativação em malha aberta e fechada (posição) utilizando o controle clássico.....	59
-		
<b>FIGURA 5.2</b>	Ativação em malha aberta e fechada (velocidade) utilizando o controle clássico.....	60
-		
<b>FIGURA 5.3</b>	Forças de controle em cada roda do veículo.....	60
-		
<b>FIGURA 5.4</b>	Simulação em malha aberta e fechada (posição) por alocação de pólos para o projeto 1.....	62
-		
<b>FIGURA 5.5</b>	Simulação em malha aberta e fechada (velocidade) com alocação de pólos para o projeto 1.....	63
-		
<b>FIGURA 5.6</b>	Sinal de controle $u$ para o projeto 1.....	63
-		
<b>FIGURA 5.7</b>	Simulação em malha aberta e fechada (posição) com alocação de pólos para o projeto 2.....	64
-		
<b>FIGURA 5.8</b>	Simulação em malha aberta e fechada (velocidade) com alocação de pólos para o projeto 2.....	65
-		
<b>FIGURA 5.9</b>	Sinal de controle $u$ para projeto 2.....	65
-		
<b>FIGURA 5.10</b>	Simulação em malha aberta e fechada (posição), controle LQR.....	67

<b>FIGURA</b>	Simulação em malha aberta e fechada (velocidade), controle LQR.....	67
<b>5.11</b>		
<b>FIGURA</b>	Sinal de controle $u$ para o controle LQR.....	68
<b>5.12</b>		



## LISTA DE SÍMBOLOS

A	-matriz do sistema massa-mola-amortecedor
B	-matriz de entrada
C	-matriz de observação
$c_1, c_2, c_3, c_4$	-amortecedores
c	-matriz de amortecimento
$\tilde{c}$	-matriz de amortecimento mediada $\tilde{c} = m^{-1/2} c m^{1/2}$
$E_c$	-energia cinética
$E_p$	-energia potencial
e(t)	-vetor erro
f(t)	-força aplicada no sistema
$f_1, f_2, f_3, f_4$	-forças de controle
F(s), G(s), T(s)	-funções de transferência
$I_x, I_y$	-momento de inércia nas direções x e y, respectivamente
i	-contador
J	-índice de desempenho
k	-constante da mola, matriz de rigidez
$\tilde{k}$	-matriz de rigidez mediada $\tilde{k} = M^{-1/2} k M^{-1/2}$
$K, K_r, K_f, K_{can}$	-matrizes de ganhos
$K_p, K_d$	-ganho proporcional
L	-Lagrangeano

$L_1, L_2$	-distâncias do eixo frontal e traseiro ao centro de massa
$L_3, L_4$	-distâncias das rodas traseiras em relação ao eixo do veículo
$m$	-massa do corpo
$M$	-matriz massa
$P_1$	-matriz dos autovalores de $\tilde{k}$
$P$	-matriz positiva-definida
$q$	-graus de liberdade
$q_1$	-excitação da roda traseira do veículo
$q_2$	-excitação da roda dianteira do veículo
$P, Q, R$	-matrizes de ponderação
$r$	-raio de giração (indica a distribuição da massa do corpo)
$T_d$	-tempo derivativo
$T_i$	-tempo integral
$t$	-tempo
$U(s)$	-sinal de controle
$U$	-variável qualquer (deslocamento, rotação)
$x(t)$	-vetor de estado
$w$	-frequência
$w_d$	-frequência natural amortecida
$y(s)$	-sinal de saída
$z$	-direção vertical
$z_1, z_2, z_3, z_4$	-forças exercidas em cada roda do automóvel

## SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\alpha_{ij}$	-função resposta em frequência
$\beta$	-parâmetro
$\delta(t)$	-impulso unitário
$\Delta$	-variação
$\lambda$	-matriz de controlabilidade
$\lambda_1, \lambda_2$	-autovalores
$\mu$	-coeficiente de atrito
$\mathfrak{O}$	-matriz de observabilidade
$\Omega$	-parte imaginária dos autovalores
$\theta, \phi$	-ângulos
$\xi$	-coeficiente de amortecimento

## 1- INTRODUÇÃO

Vibração, em geral, é uma forma de energia perdida e indesejável. Para poder eliminar os efeitos adversos da maioria das vibrações, um dos procedimentos é fazer um estudo completo da equação de movimento do sistema em questão [Seto,1971]. Geralmente, o sistema é idealizado e simplificado em termos de *massa, mola e amortecedor*. A equação do movimento expressa, assim, o deslocamento como função do tempo e dá a distância entre qualquer posição instantânea da massa durante seu movimento e a posição de equilíbrio; tal equação pode ser obtida através da segunda lei de Newton.

O período do sistema é o tempo requerido para um movimento periódico repetir-se e a frequência é o número de ciclos por unidade de tempo. A frequência natural é então obtida da equação do movimento. Frequência natural refere-se ao sistema com vibração livre sem atrito, enquanto que a frequência natural amortecida é a do sistema que tem vibração com atrito. A maioria dos sistemas, durante o seu movimento vibratório, encontra atrito ou resistência sob a forma de amortecimento. O amortecimento, em suas várias formas, tais como do ar, fluido qualquer, magnético, interno, etc., diminuirá a amplitude do movimento e causará a eventual parada da oscilação.

A ressonância ocorre num sistema quando a frequência de excitação é igual à frequência natural do sistema. Quando isso ocorre, a amplitude de vibração aumenta sem limite e é regulada apenas pela quantidade de amortecimento presente no sistema. Desse modo, a fim de evitar efeitos desastrosos resultantes de uma amplitude muito grande de vibração em ressonância, a frequência natural de um sistema precisa ser conhecida e tratada cuidadosamente [Seto, 1971].

Os sistemas de controle automático têm assumido um papel importante no desenvolvimento tecnológico, não só em substituir o trabalho humano nas tarefas monótonas e ou cansativas, mas também, e principalmente, do fato de permitir sensível melhoria na qualidade dos processos, com pequena elevação no custo dos equipamentos. Sistemas de controle são encontrados em abundância em todos os

setores da indústria, tais como o controle de linhas de montagem automática, de suspensão de automóveis, de robótica, etc.

Em princípio, qualquer grandeza física pode ser controlada, isto é, pode ter seu valor intencionalmente alterado. Certamente, há limitações práticas; uma das inevitáveis é a energia de que dispomos para afetar os fenômenos. Por exemplo, a maioria das variáveis climatológicas podem ser medidas mas não controladas, por causa da ordem de grandeza da energia envolvida [Castrucci, 1960].

As vantagens da regulação automática são [Sighieri, 1987]:

- Aumento na qualidade do produto, da produção, pois se minimizam as perdas por falhas humanas.
- Segurança no sistema com dispositivos automáticos.

Os sistemas de controle podem ser classificados em duas categorias: sistemas em malha aberta e fechada. Os primeiros são sistemas de controle nos quais a saída não tem efeito na ação do controle. Isto é, em um sistema em malha aberta a saída nem é medida nem é realimentada para comparação com a entrada. Na presença de distúrbios, um sistema de controle em malha aberta não desempenhará a tarefa desejada. O controle de malha-aberta, na prática, somente pode ser usado se a relação entre a entrada e a saída for conhecida e não houver distúrbios internos ou externos consideráveis.

Sistema de controle em malha fechada, por outro lado, é aquele no qual o sinal de saída possui efeito direto na ação de controle. Isto é, sistemas de controle em malha fechada são realimentados. O sinal erro atuante, que é a diferença entre o sinal de entrada e o realimentado, é fornecido no controlador de modo a reduzir o erro e manter a saída do sistema no valor desejado.

O controle de um sistema físico pode ser efetivado através de uma operação em malha fechada ou de realimentação. Uma variável de saída, chamada resposta, é ajustada conforme determinação do sinal de erro. Este sinal é a diferença entre a resposta do sistema, medida por um sensor, e o sinal de referência, que representa a resposta desejada. Geralmente, é necessário um controlador ou compensador para

filtrar o sinal de erro de forma que certos critérios, ou especificações, sejam satisfeitos. Estes critérios podem envolver as seguintes características [Phillips, 1996]:

- Rejeição a distúrbios
- Erros de regime estacionário
- Características da resposta transitória
- Sensibilidade às mudanças de parâmetros

Um controlador automático compara o valor real da grandeza de saída do processo com a grandeza de referência (valor desejado), determina o desvio e produz um sinal de controle que reduz o desvio a zero ou a um valor pequeno. A maneira pela qual o controlador automático produz o sinal de controle é chamada ação de controle.

Os controladores analógicos industriais podem ser classificados de acordo com a ação de controle, como [Ogata, 1982]:

- Controladores de duas posições ou liga-desliga (on-off)

Nestes o elemento atuante possui apenas duas posições fixas que são, em muitos casos, simplesmente “ligado” ou “desligado”. O controle de duas posições é relativamente simples e barato e, por esta razão, extremamente utilizado tanto em sistemas de controle industriais como de controle domésticos.

- Controladores proporcionais (integral e derivativo)

A combinação da ação de controle proporcional, integral e derivativa é denominada ação proporcional-integral-derivativa. Esta ação combinada possui as vantagens de cada uma das três ações de controle individuais. A equação de um controlador com esta ação combinada é dada por

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

onde  $K_p$  indica o ganho proporcional,  $T_d$  o tempo derivativo e  $T_i$  tempo integral.

A maioria dos controladores analógicos industriais utiliza eletricidade ou fluido pressurizado, tais como óleo ou ar, como fonte de energia. Os controladores também podem ser classificados de acordo com o tipo de fonte de energia empregada na operação, como nos pneumáticos, hidráulicos ou eletrônicos. A espécie de controlador a ser utilizada deve ser decidida com base no tipo de processo a controlar e nas

**condições de operação, incluindo considerações como segurança, custo, disponibilidade, precisão, confiabilidade, peso e dimensão.**

- **Controladores pneumáticos**

**Como meio mais versátil de transmitir sinais e potência, os fluidos, sejam como líquidos ou gases, têm amplo emprego na indústria. Líquidos e gases podem ser distinguidos basicamente por suas incompressibilidades relativas e pelo fato que um líquido pode ter uma superfície livre, enquanto um gás se expande para encher seu recipiente. No campo da engenharia, o termo pneumático descreve os sistemas de fluidos que usam ar ou gases e o hidráulico se aplica aos sistemas que usam óleo.**

**Os sistemas pneumáticos são extensivamente usados na automação de maquinaria de produção e no campo dos controladores automáticos. Por exemplo, circuitos pneumáticos que convertem a energia do ar comprimido em energia mecânica têm amplo uso, e vários tipos de controladores pneumáticos são encontrados na indústria.**

- **Controladores hidráulicos**

**O amplo uso de circuitos hidráulicos nas aplicações de máquinas ferramentas, nos sistemas de controle de aviões e de operações similares ocorre devido a fatores tais como precisão, flexibilidade, alta relação potência-peso, partida rápida, parada e reversão com suavidade, precisão e simplicidade de operação. A pressão de operação em sistemas hidráulicos está situada entre 1 e 35 MPa. Em algumas aplicações especiais a pressão de operação pode ir até 70 MPa. Para um mesmo valor de potência requerida, o peso e o tamanho da unidade hidráulica podem ser reduzidos, aumentando-se a pressão de alimentação. Em sistemas hidráulicos de alta pressão podem ser obtidos valores muito grandes de força. O posicionamento preciso e a atuação rápida de cargas pesadas é possível com sistemas hidráulicos.**

**Há um certo número de vantagens e desvantagens na utilização de sistemas hidráulicos no lugar de outros sistemas. Pode-se citar algumas vantagens, tais como:**

- **o fluido hidráulico atua como lubrificante, além de transportar o calor gerado no sistema para um trocador de calor conveniente;**

- **atuadores hidráulicos de tamanho pequeno podem desenvolver grandes forças ou torques;**

- estes possuem velocidade de resposta mais alta com partidas e paradas rápidas e inversões de velocidade;

- podem ser operados sob condições contínuas de reversão e de parada repentina, sem avarias, etc.

Por outro lado, várias desvantagens tendem a limitar seu uso, como por exemplo:

- a energia sob a forma hidráulica não está prontamente disponível se comparada à energia elétrica;

- o custo do sistema hidráulico pode ser mais alto do que o de um sistema elétrico comparável que desempenhe uma função similar;

- há perigo de incêndio e de explosões, a menos que sejam usados fluidos à prova de fogo; óleo contaminado pode causar falhas no funcionamento adequado de um sistema hidráulico, etc.

Atenção especial é necessária para garantir que o sistema hidráulico seja estável e satisfatório sob todas as condições de operação. Uma vez que a viscosidade do fluido hidráulico pode afetar grandemente os efeitos do amortecimento e do atrito dos circuitos hidráulicos, testes de estabilidade devem ser realizados na temperatura de operação mais alta possível [Ogata, 1982].

No projeto de um sistema de controle, é importante que o sistema satisfaça às especificações de desempenho dadas. Como os sistemas de controle são dinâmicos, as especificações de desempenho podem ser dadas em termos do comportamento da resposta transitória para determinadas entradas, como entradas em degrau, em rampa, etc., ou em termos de um índice de desempenho. Os sistemas de controle ótimo baseados em índices de desempenho quadrático fornecem leis de controle lineares, isto é,  $u(t) = -Kx(t)$ ; portanto, o projeto de sistemas de controle ótimo baseados em tais índices se resume à determinação dos elementos da matriz  $K$ .

Geralmente, um sistema é não aproveitável quando é instável. Todos os sistemas físicos possuem entradas indesejáveis, chamadas distúrbios (perturbações), somadas às entradas usadas pelos sistemas de controle. Em geral, deseja-se que um sistema responda de forma significativa as perturbações. Assim, a capacidade de rejeição aos distúrbios de um sistema é muito importante.



Há vários métodos gráficos disponíveis para a determinação da estabilidade de sistemas de controle. São eles [Distefano, 1979; Kuo,1995]:

- Método do Lugar das Raízes
- Diagrama de Bode
- Diagrama de Nyquist
- Diagrama de Nichols

Os últimos três são técnicas no domínio de frequência. A representação utilizada neste trabalho é chamada diagrama de Bode. A principal vantagem deste sobre os outros tipos é que os efeitos da adição de um pólo real ou um zero real na função de transferência podem ser visualizados facilmente. Por esta razão, os diagramas de Bode são muito usados no projeto de sistemas de controle.

No presente trabalho desenvolve-se a simulação e o controle de um sistema de suspensão. Será analisado, primeiramente, um sistema de dois graus de liberdade, que leva a uma introdução simples do comportamento de sistemas de três graus de liberdade; que requer três coordenadas para descrever o seu movimento. Para obter as equações do movimento utilizou-se como base a segunda lei de Newton e a equação de Lagrange. O resultado destas equações é obtido através do MATLAB (Runge-Kutta), para o caso de um sistema de dois graus de liberdade, que é comparado com a solução analítica obtida para validar o método numérico utilizado.

Descreve-se, brevemente, a seguir o conteúdo do trabalho na forma de capítulos. O capítulo 2 contém a revisão bibliográfica, envolvendo trabalhos sobre dinâmica de carros, modelagem e controle de estruturas flexíveis. O capítulo 3 faz uma abordagem sobre modelos dinâmicos com um, dois e três graus de liberdade. O modelo escolhido para comparar a solução analítica e numérica foi um sistema de dois graus de liberdade. No capítulo 4 apresentam-se noções sobre a teoria de controle, ou seja, controlabilidade e observabilidade de um sistema com um grau de liberdade e diagramas de Bode; desenvolve-se o projeto com três controladores, tais como o controle clássico, por alocação de pólos e LQR. No capítulo 5 são apresentadas diversas simulações e a análise de resultados para sistemas com 3 graus de liberdade. Estas simulações são referentes ao controle clássico (proporcional), por alocação de pólos e LQR. Finaliza-se com o capítulo 6, o qual contém conclusões gerais referentes

**às simulações realizadas nesta dissertação, que são seguidas das referências bibliográficas utilizadas.**

## **2 –ASPECTOS RELATIVOS À DINÂMICA DE AUTOMÓVEIS**

Antes de citar alguns trabalhos referentes à dinâmica de veículos, serão apresentadas algumas considerações e definições sobre tipos de molas e suspensões, a fim de facilitar a compreensão de alguns conceitos utilizados neste trabalho. Inicialmente, serão citados alguns elementos do qual um automóvel é composto, ou seja, pelo motor que produz a energia mecânica necessária para a sua locomoção, a direção no qual o motorista pode agir sobre a trajetória do veículo, o chassi que agrupa todas as peças do veículo, o equipamento elétrico, o qual possibilita a iluminação externa e interna do carro, bem como, a sinalização e o funcionamento de todos os dispositivos que utilizam corrente elétrica, os freios que atuam sobre as rodas ocasionando a diminuição da velocidade, a suspensão que reúne todas as peças destinadas a estabilizar a posição do automóvel independente das irregularidades encontradas na pista, que é um fator de segurança e constitui a base fundamental do conforto num carro. É precisamente nesse contexto que se insere o principal objetivo desta dissertação, a qual apresenta um estudo sobre a simulação e o controle de um sistema de suspensão; tal controle tem por objetivo atenuar, de forma ativa, as vibrações do automóvel. Tem-se também o acelerador, a embreagem, a caixa de câmbio, etc.

### **2.1 – Suspensão**

A suspensão de um automóvel destina-se a diminuir as trepidações que resultam do contato das rodas com o solo. A suspensão compreende todos os elementos que participam da estabilidade, da firmeza e do conforto.

A estabilidade de um veículo caracteriza-se por conservar uma posição longitudinal e transversal paralela ao plano sobre o qual se desloca, sendo que um defeito de estabilidade no sentido longitudinal seria a “arfagem”, que sucede quando há um desnivelamento ou uma frenagem brusca, e é traduzida por várias oscilações para frente e para trás. Uma inclinação lateral do veículo seria o “balanço”, que aparece nas curvas e especialmente quando a via forma ziguezagues sucessivos; no entanto, a firmeza do veículo é a sua propriedade de conservar a trajetória exata dada pelas rodas diretrizes. Esta firmeza é prejudicada diretamente pelos fenômenos de deslocamento dos pneumáticos e os defeitos de geometria da direção.

A estabilidade e a firmeza dependem da disposição das molas e da interdependência da sua ação comum; costumam ser melhoradas devido aos dispositivos estabilizadores e aos amortecedores. O conforto também está relacionado com o conjunto das componentes de suspensão sendo este completado pela forma e flexibilidade da guarnição dos suportes, bem como pela flexibilidade dos pneumáticos.

Nos automóveis, as qualidades da suspensão serão melhores quanto menor for o peso “não suspenso” em relação ao peso “suspenso”. O peso “não suspenso” abrange todos os elementos localizados entre as molas e a superfície do solo, onde esses elementos estão sujeitos a todas as trepidações de rodagem e a sua massa deve ser a menor possível. Isto é de importância essencial para os veículos de pequeno porte. As construções de rodas independentes apresentam, entre outras qualidades, a de reduzir consideravelmente o peso de elementos “não suspensos” [Chollet, 1981].

Resumidamente, pode-se dizer que suspensão é um conjunto de peças que impedem a transmissão dos solavancos, que a roda sofre, à carroçaria e é feito por um conjunto de molas e amortecedores [Oliveira, 2000]. Assim, a seção seguinte cita alguns tipos de molas.

## **2.2 – Tipos de mola**

Pode-se citar como tipos de molas as de lâminas, as helicoidais e as de barra de torção. As molas de lâminas são formadas pela superposição de um certo número de lâminas de aço, de comprimento decrescente, ligadas por um parafuso central (parafuso de fixação). Esse tipo de mola tem certas vantagens tais como:

- simplicidade de fabricação,
- obtenção facilitada de uma ligação rígida entre o eixo e o chassi nos sentidos longitudinal e transversal
- segurança de funcionamento, uma vez que o rompimento de uma lâmina não elimina a ligação do eixo com o chassi.

As desvantagens de usar esse tipo de mola consiste em:

- grandes superfícies de atrito, cuja lubrificação é sempre difícil de assegurar
- facilidade de rompimento das lâminas por efeito de dilatação e contração térmica.

As molas helicoidais (espirais) são constituídas por uma barra de aço enrolada em forma de hélice, sendo uma ligada ao chassi e outra ao eixo. As vantagens das molas espirais consistem na simplicidade de fabricação, redução de espaço, ausência de atrito e, portanto, dispensando manutenção.

Por outro lado, a desvantagem desse tipo de mola é que não asseguram nenhuma ligação longitudinal e nem transversal entre o chassi e o eixo; por isso, as suspensões por molas helicoidais têm sempre braços articulados para efetuar esta ligação permitindo as oscilações verticais.

As molas de barra de torção são formadas por uma barra de aço cilíndrica, onde uma das pontas da barra é fixa ao chassi por meio de um suporte regulável; pela outra ponta, ela gira em rolamento e possui uma alavanca ligada ao arco da roda. As oscilações verticais da roda provocam uma torção da barra cuja seção e comprimento são criteriosamente calculados e suas vantagens consistem na economia de espaço e facilidade de alojamento do chassi, possibilitam a regulagem exata da altura do veículo no solo com respeito a cada roda e possuem pouco atrito e manutenção quase nula.

As molas de suspensão têm grande flexibilidade, dando assim bastante suavidade de rodagem ao veículo. Como as molas flexíveis provocam um rebote repetido após a passagem em desnivelamentos [Chollet, 1981]; a aderência das rodas varia constantemente podendo provocar derrapagens perigosas, e os amortecedores servem para frear o rebote, ou seja, a distensão da mola. Os amortecedores são instalados perto de cada roda e formam uma ligação entre a massa e o chassi. A seção seguinte cita alguns tipos de amortecedores.

### **2.3 - Amortecedores**

Pode-se citar dois tipos de amortecedores que melhoram a firmeza nas curvas e tornam a ligação entre as rodas e o chassi mais firmes [Chollet, 1981]: os amortecedores de ação simples e de ação dupla. A finalidade dos amortecedores de ação simples é somente de frear a expansão da mola (retorno) e não opõem nenhuma resistência à flexão da suspensão. No entanto, os de ação dupla freiam as oscilações nos dois sentidos, ocasionando uma leve frenagem à retração da mola e uma frenagem potente na expansão. Existem também os amortecedores hidráulicos que são formados por um cilindro metálico, onde se movem um ou vários pistões. Este cilindro é fixado no chassi, contém óleo especial e todas as

oscilações do eixo provocam deslocamento do pistão no cilindro e recalque do óleo num ou noutro sentido. Com o recalque, este óleo passa por um orifício calibrado que regula o fornecimento e, assim, o pistão sofre uma grande resistência que refreia o seu movimento e retarda a distensão da mola de suspensão. A combinação destes elementos é importante e a sua disposição depende do tipo de suspensão.

#### 2.4 - Tipos de suspensão

Qualquer que seja a mola utilizada, o tipo de suspensão de um automóvel é caracterizado pela maneira que as rodas são ligadas ao chassi. Há vários tipos de suspensões, tais como a de eixo rígido e de rodas independentes [Chollet, 1981].

As suspensões de eixo rígido são ligadas transversalmente por uma peça rígida (o eixo) que as tornam dependentes uma da outra. Quando uma roda passa por um obstáculo, o seu deslocamento vertical provoca uma inclinação da roda oposta e segue-se um deslocamento lateral do veículo, podendo ser para a esquerda ou para a direita da trajetória, provocando perturbações que diminuem a firmeza na via, como mostrado na Fig. 2.1A. O eixo com as duas rodas forma uma massa não suspensa de grande importância, cujas trepidações prejudicam a estabilidade.

Nas suspensões de rodas independentes [Chollet, 1981] cada roda é ligada ao chassi por um sistema de braços articulados no sentido vertical. Na passagem por um obstáculo, apesar de provocar um deslocamento vertical de uma das rodas, não causa nenhum desvio lateral e o veículo permanece na sua trajetória, conforme ilustrado na Fig. 2.1B.

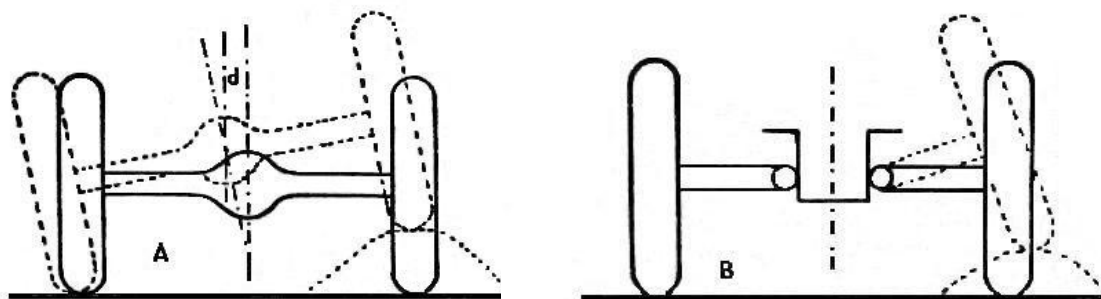


Fig. 2.1 - Deslocamento lateral do eixo do veículo [Chollet, 1981]:

- A) Eixo rígido passando por um obstáculo e provocando o deslocamento lateral (d) do eixo do veículo.
- B) Eixo de rodas independentes que passam por um obstáculo sem provocar deslocamento lateral.

Os sistemas de articulação das rodas independentes apresentam algumas diferenças quanto à posição da roda no solo e ao seu comportamento durante oscilações. Por exemplo, na Fig. 2.2 um sistema de paralelogramo transversal [Chollet, 1981] é representado na figura A. Na figura B mostra-se um sistema de alavancas transversais desiguais; da mesma forma as figuras C, D e E representam, respectivamente, o braço longitudinal, o deslizamento vertical e o semi-eixo articulado.

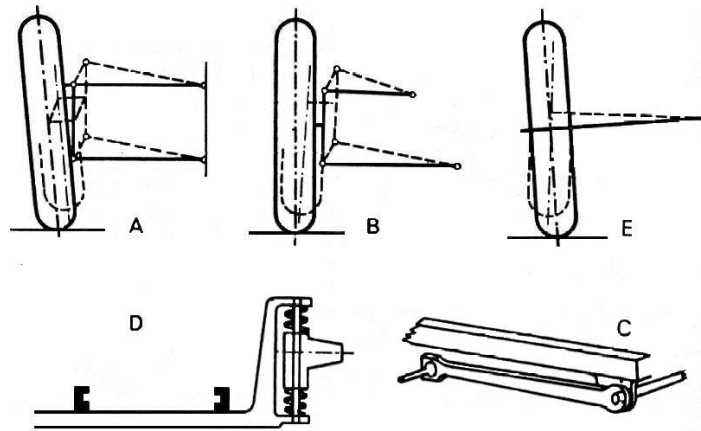


Fig. 2.2 - Sistemas de articulação de rodas independentes [Chollet, 1981]

O sistema de paralelogramo transversal (Fig. 2.2 A) é composto de dois braços de igual comprimento que mantêm uma queda (deslocamento vertical) constante da roda, mas provoca uma variação da largura entre as rodas do veículo, conforme a carga e as oscilações. Esses tipos de sistemas costumam ter duas molas de lâminas transversais ou uma mola de lâminas e um braço articulado, tendo ainda montagens com barra de torção longitudinal encaixada no ponto de articulação do braço inferior.

Sistemas de alavancas transversais desiguais (Fig. 2.2 B) mantêm a largura quase constante, mas provocam uma variação de queda da roda a cada oscilação e o pneumático não sofre nenhum deslocamento lateral no solo. Esses tipos de sistema têm sempre duas alavancas articuladas com mola helicoidal vertical ou uma barra de torção longitudinal encaixada no ponto de articulação da alavanca inferior.

O sistema de braço longitudinal articulado no chassi (Fig. 2.2 C) permite oscilação vertical da roda, sem modificação da queda da roda e sem variação da largura. Esse tipo de

sistema encontra-se particularmente nas rodas traseiras não motrizes e a roda costuma ter uma mola na barra de torção instalada transversalmente com relação ao chassi.

O sistema de deslizamento vertical (Fig. 2.2 D) não modifica nem a bitola (largura entre rodas) nem a queda da roda e o deslizamento ocorre no interior ou no exterior de um tubo vertical, junto ao chassi, que contém sempre uma mola de suspensão do tipo helicoidal.

O sistema de semi-eixo articulado (Fig. 2.2 E) com o centro do chassi dá a cada oscilação uma variação da largura e da queda da roda, e o pneumático sofre um deslocamento lateral na superfície do solo. Usa-se esse tipo de sistema somente nas rodas traseiras motrizes, simplificando a montagem mecânica do eixo das rodas independentes, sendo este o sistema utilizado nos automóveis Mercedes e Volkswagen.

Pode-se citar ainda o sistema telescópico e o de Dion, sendo o sistema telescópico com amortecedor integrado a uma suspensão bastante recente e compreende um triângulo inferior articulado no chassi e um tubo telescópico vertical com uma mola helicoidal superior. Este triângulo inferior suporta todas as reações da roda, e a sede da mola de suspensão só está sujeita aos esforços de carga. Aplica-se este tipo de sistema de suspensão tanto à parte dianteira como à traseira do automóvel. O triângulo inferior costuma ser transversal ou oblíquo, na frente, e atrás a forma se parece com um braço longitudinal.

Entretanto, o sistema de Dion é um tipo de suspensão para veículos de rodas independentes, com eixo motor traseiro onde as rodas podem oscilar verticalmente sem alteração da largura nem da queda da roda, sendo que os órgãos de frenagem são reunidos na saída do diferencial que é fixo ao chassi. Portanto, tem-se assim uma suspensão ideal, de geometria constante e de peso mínimo não suspenso. Os braços dianteiros tem quase sempre forma triangular, quando se tratar de rodas dianteiras independentes, com braços transversais articulados; isto favorece a resistência do braço a todas as reações da roda com o solo e aos esforços de torção causados pela frenagem.

Na próxima seção introduz-se as suspensões pneumáticas e hidropneumáticas, que são comuns na prática.



### 2.4.1 – Suspensões pneumáticas e hidropneumáticas

São suspensões especiais, de recente fabricação, que se baseiam na elasticidade dos gases contidos e comprimidos em uma câmara de volume variável, sendo que a grande flexibilidade do gás permite trabalhar com pressões bastante diferentes. Esta pode ser encontrada principalmente nos veículos que apresentam uma diferença muito grande entre o peso em vazio e o máximo. Este tipo de suspensão proporciona instantaneamente a pressão de equilíbrio apropriada a toda gama de possibilidades de trabalho do veículo. Isto faz com que a altura do veículo permaneça constante em relação ao solo. Como a pressão da suspensão varia com a carga, esta é utilizada para corrigir a importância da frenagem em cada eixo. O esforço máximo dos setores do freio acha-se, assim, continuamente limitado às possibilidades de aderência das rodas.

Por outro lado, o sistema de suspensão hidropneumática serve especialmente para os veículos leves não equipados com sistema de freios a ar comprimido e esse tipo de suspensão não possui amortecedores externos e usa, de preferência, um gás neutro, o nitrogênio, que é colocado na câmara esférica sob pressão inicial de 30 a 60 bars ( $1 \text{ bar} = 10^{-5} \text{ N} / \text{m}^2$ ), conforme a carga do eixo.

Pode-se citar também a suspensão “compound”; nesta há uma ligação entre os braços de suspensão das rodas dianteiras e traseiras de cada lado do automóvel. O objetivo dessa ligação é acionar uma das rodas enquanto a outra está sujeita a um grande desnivelamento. Como as reações de um braço da suspensão sobre o outro neutralizam qualquer tendência à arfagem, o veículo conserva a posição longitudinal paralela ao solo, no momento em que uma das rodas passa por uma saliência.

Em alguns automóveis, as molas helicoidais são instaladas horizontalmente duas a duas, ponta a ponta, nos cilindros ditos “panela de suspensão” montados em cada lado do veículo, sendo que cada cilindro é móvel no sentido longitudinal e serve de ligação entre a mola dianteira e a traseira do lado considerado. Cada um dos braços da suspensão provoca a compressão de sua própria mola e, como as duas molas geminadas se apóiam uma sobre a outra por meio da panela de suspensão, o impulso de uma das compressões é neutralizado pelo impulso da outra, resultando assim uma igualdade das cargas sobre as rodas dianteira e traseira do mesmo lado. Se uma das rodas sofrer um deslocamento vertical na passagem por

um desnivelamento, o seu movimento será transmitido à roda geminada, cuja reação evita o aparecimento da arfagem.

Pode-se citar algumas suspensões existentes no mercado, como por exemplo, a Mitsubishi Lancer que utiliza nas rodas dianteiras a tradicional MacPherson com os amortecedores montados invertidos, que na prática melhora sutilmente o comportamento dinâmico do carro [Treviso, 2001].

Todos os veículos da Fiat [Fiat, 2002] também possuem na dianteira suspensão do tipo MacPherson, que se caracteriza por apresentar rodas independentes e têm como vantagem impedir que as vibrações de uma roda sejam transmitidas para a outra, proporcionando maior conforto para os ocupantes do veículo. Na traseira a suspensão é do tipo independente, porque permite a completa liberdade de uma roda em relação à do lado oposto, no que se refere aos movimentos verticais.

No entanto, na nova suspensão da Citroën, em fases iniciais, usa-se suspensão hidractiva, na qual o carro fica mais alto ou mais baixo de acordo com o piso, ou seja, o destaque do novo sistema é a capacidade de mudar a altura do veículo em função do seu comportamento, velocidade e tipo de solo [Dias, 2000]. No tráfego urbano ou em estradas onde o asfalto é bom, abaixo de 110km/h o carro permanece em sua altura de referência. Acima dessa velocidade o veículo baixa 15mm, o que melhora a estabilidade com o centro de gravidade mais baixo, reduz o consumo de combustível pela aerodinâmica mais favorável e diminui a sensibilidade aos ventos laterais. Se a velocidade cai abaixo de 70km/h, o carro volta à sua altura de referência. Mas, quando as condições de piso pioram, o comando eletrônico eleva a carroceria. Onde o piso é muito ruim, abaixo de 60km/h, a carroceria se eleva em até 20mm. Uma central eletrônica determina essa altura e as condições de subida ou descida da suspensão são obtidas pelo acréscimo ou retirada do líquido hidráulico no sistema.

A próxima seção indica alguns trabalhos envolvendo controle de estruturas flexíveis, para posteriormente indicarmos alguns trabalhos que envolvem a dinâmica de automóveis.

## **2.5 - Trabalhos envolvendo controle de estruturas flexíveis**

Uma característica presente em praticamente todos os materiais utilizados na fabricação de equipamentos é a flexibilidade, nas mais diversas aplicações, seja em aeronaves, robôs-manipuladores, veículos, edificações, estruturas metálicas para a construção civil, etc. Atualmente, as principais aplicações se dão no domínio da chamada robótica flexível [Pereira, 1999]. Os robôs, neste caso, possuem elos (elementos que unem uma articulação a outra) flexíveis, os quais dificultam as tarefas de controle, sendo esta uma aplicação muito presente na engenharia aeroespacial. Um exemplo seria o caso de um manipulador espacial, cujo principal objetivo é a realização de tarefas tais como a montagem de estações orbitais e reparos em satélites artificiais.

Outra importante aplicação no domínio de sistemas espaciais seriam os satélites com apêndices flexíveis [Pereira, 1999]. Estes apêndices geralmente estão associados a painéis solares, os quais captam a energia solar para alimentar os equipamentos de bordo; normalmente esses painéis possuem grandes dimensões e, conseqüentemente, são também possuidores de flexibilidade estrutural. Por outro lado, no campo da robótica industrial, há uma crescente necessidade de aumentar as velocidades de operação dos robôs, o que só é possível com a diminuição das massas dos seus elos e, conseqüentemente, com um acréscimo inevitável da flexibilidade dos elos. Outro trabalho refere-se à modelagem e identificação experimental de um elo robótico flexível, cujo modelo é composto de uma viga de alumínio, atuada na base por um motor DC, ou de corrente contínua [Soares e Goés, 1994].

Sempre existirão vibrações inerentes às dinâmicas desses sistemas. Cita-se como exemplo a modelagem de uma estrutura com três graus de liberdade que possui características cinemáticas e dinâmicas similares a um robô [Somolinos et al., 1999]. Estas vibrações são conseqüências da flexibilidade natural dos materiais e, na maioria dos casos, trata-se da flexibilidade contínua, traduzida em infinitos modos de vibração [Meirovich, 1975]. Cada modo possui a sua freqüência específica e, teoricamente, um sistema com flexibilidade contínua possui infinitas freqüências. Por exemplo, uma asa de uma aeronave em vôo possui seus modos de vibração continuamente ativados devido ao contato da estrutura com o ar, mas se colocarmos um sensor que fosse capaz de medir a velocidade da ponta da asa com relação à linha neutra da mesma, captar-se-ia neste sinal alguns dos

primeiros modos de vibração, pois, não há sensor capaz de medir vibrações quando a frequência tende ao infinito [Machado, 1999]. Esta é uma das razões pelas quais se admite modelos que consistem em aproximações discretas e, portanto, com um número finito de modos de vibração.

Se o objetivo é apenas encontrar um modelo sistemático (dinâmica nominal) que se aproxima da dinâmica real e que não exige um alto nível de realismo para este modelo, tem-se então um problema relativamente simples; mas se o objetivo é controlar, de forma ativa, uma estrutura contendo flexibilidade, surgem diversas dificuldades as quais, por vez, podem inviabilizar completamente a implementação prática da lei de controle desenvolvida.

Considere um sistema massa-mola-amortecedor, conforme a figura 2.3.

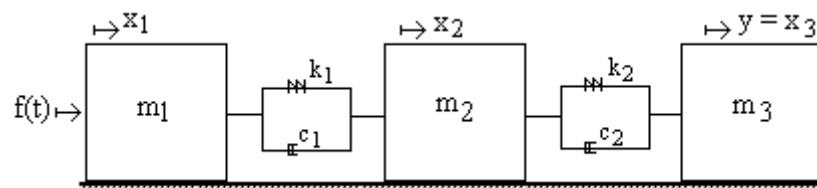


Fig. 2.3 – Sistema massa-mola-amortecedor de 3 graus de liberdade

A força de controle  $f(t)$  está sendo aplicada na massa  $m_1$ , enquanto que a observação feita no sistema consiste na posição da massa  $m_3$ ; isto caracteriza o sistema não colocado, ou seja, a força de controle é aplicada fora do local de observação com relação a todos os modos de vibração. Se a observação fosse feita na massa  $m_2$ , o sistema seria não colocado com relação a um dos modos de vibração, enquanto que se a observação fosse realizada na massa  $m_1$ , o sistema seria colocado uma vez que a força de controle seria aplicada no mesmo local da observação.

Quando se deseja controlar estruturas flexíveis, deve-se atenuar as vibrações em todos os modos e, portanto, o processo de realimentação para o controle deve se dar observando todas as variáveis de estado. Isto é difícil de acontecer, porquê em aplicações práticas, o nível de instrumentalização possui limitações em termos dos sensores os quais inviabilizam a observação do estado completo. Outro fato é a dificuldade naturalmente surgida ao se tentar controlar sistemas não colocados, dificuldade inerente a toda a

dinâmica flexível existente entre o local da aplicação do esforço de controle e no qual se realiza a observação.

Pode-se citar outras dificuldades impostas ao problema do controle de estruturas flexíveis em aplicações reais como [Schmitz, 1985; Machado et al., 1999]:

- existência de perturbações externas;
- diferenças entre as dinâmicas da planta real (sistema físico) e do modelo matemático nominal;
  - existência de ruídos provenientes dos sensores, os quais são realimentados no sistema na forma de erros de observação;
  - dinâmica não linear dos atuadores.

Para o estudo do desenvolvimento de controladores para estruturas flexíveis, com condições reais de implementação prática, torna-se importante o entendimento de robustez. Existem dois tipos de robustez [Cruz, 1996]: a do desempenho e a da estabilidade. Um sistema de controle robusto quanto ao desempenho significa que, mesmo em presença de perturbações externas, erros de modelagem, ruídos dos sensores, etc., o desempenho em termos da resposta do sistema em malha fechada continua mantido dentro de um nível aceitável. Da mesma forma, a robustez da estabilidade se traduz pela manutenção da estabilidade em malha fechada. A robustez do desempenho e da estabilidade constituem objetivos conflitantes, ou seja, o acréscimo de um acarreta uma diminuição do outro e vice-versa. O esforço do projeto do controlador robusto consiste na determinação de um bom compromisso entre os dois tipos de robustez.

Nos últimos anos o controle de estruturas flexíveis tem sido bastante pesquisado e esse interesse se deve principalmente às aplicações espaciais, tais como o experimento de laboratório referente ao controle de uma viga, a qual tem características de uma grande estrutura flexível. Tal estrutura é usada como teste base para o controle projetado e algoritmos da identificação para grandes estruturas espaciais [Sridhar et al, 1985].

Trabalhos recentes indicam a necessidade de desenvolver controladores robustos para estruturas flexíveis [Machado, 1999]. Neste caso, encontra-se o estudo do controle robusto de estruturas excitadas por escoamento de fluidos, onde foram desenvolvidos controladores para diminuir as vibrações de uma estrutura flexível sujeita a uma perturbação externa, originada pelo escoamento de um fluido em contato com esta. A

técnica utilizada para desenvolver um controlador robusto foi LQG/LTR e um outro controlador baseado em alocação de pólos do regulador e do filtro.

Outra aplicação que é, atualmente, muito presente na engenharia aeroespacial, é o da robótica flexível, onde os robôs possuem partes flexíveis, denominadas de elos. Pode-se citar, como exemplo, um robô formado de um único elo flexível, onde foram feitos experimentos de resposta em malha aberta para torques motores com valores grandes e pequenos de redução de atrito no atuador e comparados com simulações, sendo o controle utilizado de realimentação. Tais experimentos indicaram que o controle com realimentação tornou-se possível através do uso de um sinal de excitação de alta frequência, com o objetivo de linearizar o atuador com relação ao torque de atrito [Yoshida e Tanaka, 1990].

Outros trabalhos utilizam resultados experimentais obtidos a partir de uma lei de controle não linear num robô possuindo dois elos flexíveis, utilizando três leis de controle, ou seja, desacoplamento não linear de algumas variáveis e amortecimento de outras e uma lei de controle por meio de um critério LQR (*Linear Quadratic Regulator*), tal que as duas últimas leis revelam o comportamento satisfatório da estrutura [Chevallereau et al., 1991]. Há também outro trabalho que utiliza um método de controle de vibração, baseado num potencial artificial para um manipulador flexível. Tal sistema de controle é baseado em uma realimentação local simples do ângulo e do torque articulado [Komatsu et al., 1992].

Encontrou-se também trabalho sobre controle ativo de vibrações em rotores flexíveis usando o método LQR/LTR. Neste, abordou-se o problema do controle ativo das vibrações laterais presentes nos rotores [Ribeiro e Neto, 1995].

Noutro trabalho realizam-se experimentos relativos ao controle de posição ponto a ponto de uma viga flexível em malha aberta através da técnica de síntese do domínio de Laplace. Neste foram avaliadas uma série de funções de controle e investigado o desempenho relacionado à robustez e sensibilidade [Bhat et al., 1991]. Também encontrou-se pesquisa que usa um novo método robusto, utilizando a estrutura LQ (linear quadrática), que foi usada para o controle de um manipulador com um elo flexível [Ruy et al., 1999].

Cita-se ainda um trabalho no qual é feita a interpretação física dos zeros das funções de transferências dos sistemas de controle simples com flexibilidade mecânica, mostrando que para sistemas massa-mola discretos e vigas elásticas os pólos são as frequências ressonantes da estrutura flexível e os zeros (complexos conjugados) são as frequências de

ressonância de uma estrutura fixa em uma extremidade. Também mostra-se que quando os sistemas de controle tornam-se de fase não mínima, os zeros reais são resultantes da não propagação de energia na estrutura [Miu, 1991].

Há ainda trabalhos que abordam a modelagem de manipuladores flexíveis com dois graus de liberdade, onde a lei de controle foi obtida pela técnica LQG e que apresentaram bons resultados em simulações [Gomes,1994]. Encontrou-se estudos sobre a modelagem matemática de estruturas flexíveis [Pereira et al., 2000 (parte I e II)], tal que na primeira parte um atuador foi colocado numa extremidade de uma estrutura flexível, que tinha como objetivo atenuar vibrações na outra extremidade. Este trabalho apresenta um estudo analítico do problema de modelagem dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador. No entanto, na segunda parte foi feita uma análise das técnicas de modelagem de estruturas do tipo manipulador mecânico com elo flexível, onde duas técnicas de modelagem dinâmica, utilizando o formalismo dos Modos Assumidos, são desenvolvidas e analisadas, utilizando funções de forma polinomiais e oriundas dos modos exatos da estrutura.

Indica-se ainda o trabalho de modelagem e identificação experimental de estruturas flexíveis que desenvolveu um modelo dinâmico por modos assumidos de um manipulador com um elo flexível, onde o controlador projetado foi do tipo LQG/LTR [Soares,1997].

Na próxima seção indica-se alguns trabalhos sobre dinâmica de automóveis; um tópico tão importante, mas cuja literatura é ainda escassa.

## **2.6 – Trabalhos envolvendo dinâmica de automóveis**

Cita-se alguns exemplos de trabalhos na área da dinâmica de veículos, tais como o estudo do comportamento dinâmico de veículos sobre diferentes condições de pista [Altavini, 2001]; modelagem, simulação e visualização de movimento com auxílio de computação gráfica onde foi aplicado o princípio da cinemática e da dinâmica de corpos rígidos, além do método Newton–Euler–Jourdain, a um modelo adotado de veículo com sistema de suspensão independente, onde foram determinadas as equações diferenciais do movimento referentes aos seis graus de liberdade.

Além das equações que descrevem os movimentos lineares e angulares do corpo principal do veículo, foram obtidas ainda as expressões para o comportamento de cada um dos quatro mecanismos de suspensão, através de equações vetoriais de vínculo proveniente

do modelo utilizado. As equações (não lineares) de movimento foram integradas numericamente pelo método de Runge-Kutta, tal que a implementação foi feita numa rotina em *Sun Pascal*, para analisar o comportamento do automóvel quando submetido a diferentes condições de pista. Utilizou-se animações gráficas, desenvolvidas no software *3D Studio*, que permitem uma visualização dos movimentos do carro e, especialmente, do sistema de suspensão, facilitando a compreensão do estudo da dinâmica de veículos [Altavini, 2001].

Outro trabalho seria o dos mecanismos ativos, [Padovese, 2001]: modelagem, simulação e projeto de construção de um protótipo de suspensão ativa auxiliado por computador. Neste, o objetivo era de facilitar a compreensão de determinados tópicos referentes à cinemática e dinâmica de mecanismos ativos. Tal trabalho visa o projeto e construção de modelo mecânico (protótipo) de uma suspensão ativa, onde as equações do movimento para o modelo foram obtidas através do método de Newton-Euler; em seguida a integração das equações do movimento para a suspensão operando passivamente em uma via retilínea com irregularidades é realizada.

**Cita-se ainda projetos que determinam as equações do movimento para veículos, considerando-os como um sistema de corpos rígidos [Marsal, 2001]. Após a determinação destas equações e a definição das características do veículo e da via integram-se os respectivos movimentos, onde esses resultados são utilizados didaticamente, para exemplificar uma das ramificações atuais da dinâmica de automóveis.**

**O próximo capítulo refere-se aos modelos dinâmicos do sistema, fazendo uma breve introdução ao estudo da mecânica vibratória, a qual pode ser aplicada para a análise de sistemas de suspensões, estrutura de veículos, etc. Inicialmente, são estudados os modelos dinâmicos de um e dois graus de liberdade, pois proporcionam uma introdução simples ao comportamento de sistemas com três graus de liberdade.**



## 3 – MODELOS DINÂMICOS

### 3.1 - Vibração de Sistemas

**O estudo da vibração diz respeito aos movimentos oscilatórios de corpos e às forças que lhes são associadas. Todos os corpos dotados de massa e elasticidade são capazes de vibração. Existem dois tipos de vibrações: a livre e a forçada. A livre acontece quando um sistema oscila sob a ação de forças que lhe são inerentes e na ausência da ação de qualquer força externa. No caso de vibração livre, o sistema poderá vibrar com uma ou mais das suas frequências naturais, que são peculiares ao sistema dinâmico estabelecido pela distribuição de sua massa e rigidez. Denomina-se vibração forçada quando esta ocorre sob a forma de forças externas. Quando a excitação é oscilatória o sistema é forçado a vibrar na frequência da excitação. Se esta coincide com uma das frequências naturais do sistema, forma-se um estado de ressonância.**

**Os sistemas de vibração estão sujeitos a um certo grau de amortecimento, em face do consumo de energia pelo atrito e outras resistências. Se o amortecimento é fraco, a sua influência pode se tornar muito pequena e não é geralmente considerada nos cálculos das frequências naturais. O amortecimento, entretanto, é de grande importância ao limitar a amplitude de oscilação na ressonância [Thomson, 1978].**

**Na próxima seção será introduzido o modelo dinâmico para sistemas *massa–mola-amortecedor* com um grau de liberdade definindo-se a equação do movimento que rege este sistema e também a função de transferência.**

### 3.2 - Sistemas com um grau de liberdade

Sistemas mecânicos possuindo massa e elasticidade são passíveis de movimento. Se o movimento de tais sistemas se repete depois de determinado intervalo de tempo, o movimento é denominado vibração. Muitos sistemas podem vibrar em mais de uma forma e direção. Se um sistema é mantido de maneira que só pode vibrar de uma única forma ou modo, ou se requer somente uma coordenada independente para verificar completamente a localização geométrica das massas do sistema no espaço, temos um único grau de liberdade [Seto, 1971; Dym e Shames, 1973] .

Assim, para um sistema massa-mola-amortecedor, como mostrado na Fig. 3.1, admite-se que o movimento pode ocorrer em apenas uma direção como a indicada na figura por  $x(t)$ .

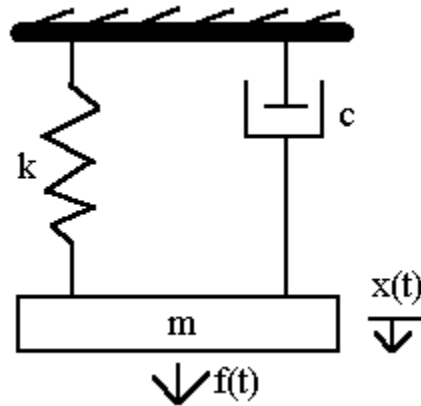


Fig. 3.1 – Sistema *massa-mola-amortecedor* de um grau de liberdade

Tem-se três forças que influenciam o movimento da massa  $m$ , são elas: a força aplicada, a de atrito e a da mola. Assim, a equação do movimento para um sistema com um grau de liberdade é dada por:

$$m\ddot{x} = f(t) - c\dot{x} - kx$$

(3.1)

Pode-se definir uma função de transferência para este sistema, tendo a força aplicada  $f(t)$  como entrada e o deslocamento da massa  $x(t)$  como saída. Assim, aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (3.1), tem-se

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

a função de transferência, onde

$$F(s) = ms^2 X(s) + csX(s) + kX(s)$$

Para um sistema do tipo,

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{f'}{m}$$

aplicando a transformada de Laplace e considerando que  $\frac{c}{m} = 2\zeta\omega$ ,  $\frac{k}{m} = \omega^2$  e  $\frac{f'}{m} = f$ ,

com  $y(0) = 0$  e  $\dot{y}(0) = 0$ , obtém-se

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (3.2)$$

a função de transferência, sendo que as raízes do denominador são os pólos desta.

A seguir será indicado um modelo dinâmico simplificado para descrever a suspensão de uma das rodas de um veículo, via um sistema *massa-mola-amortecedor* com dois graus de liberdade. Utilizou-se a segunda lei de Newton para obter as equações governantes deste sistema.

### 3.3 - Sistemas com dois graus de liberdade

Sistemas que requerem duas coordenadas independentes para especificar a sua posição são chamados sistemas de dois graus de liberdade.

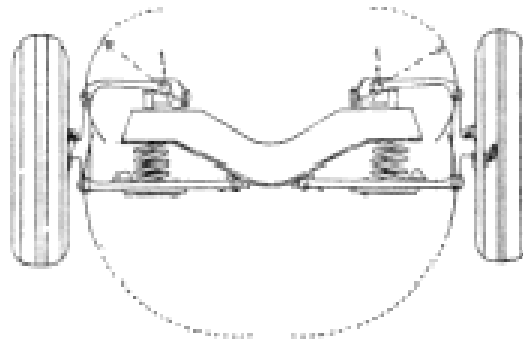
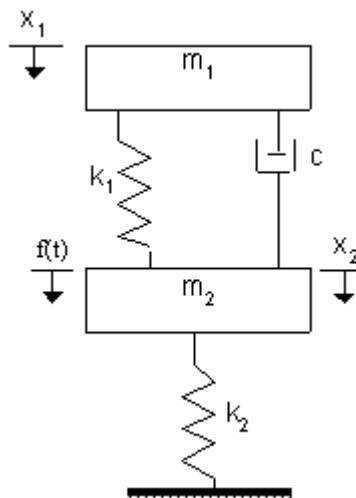


Fig. 3.2– Sistema de suspensão de um automóvel [Toboldt, 1954].

Para descrever a suspensão de uma das rodas do automóvel, como mostrado na Fig.3.2, usa-se um modelo simplificado deste sistema conforme ilustrado na Fig. 3.3, sendo  $m_1$  a massa total do automóvel dividida por quatro e  $m_2$  a massa do pneu.



**Fig 3.3 – Sistema massa-mola-amortecedor que representa o modelo da roda de um automóvel.**

As equações do movimento para este sistema são:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = f(t) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1(x_2 - x_1) - k_2x_2$$

Tomando a transformada de Laplace de ambas equações, obtém-se:

$$X_1(s) = \frac{cs + k_1}{m_1s^2 + cs + k_1} X_2(s) = G_1(s)X_2(s)$$

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{1}{m_2s^2 + cs + k_1 + k_2} F(s) + \frac{cs + k_1}{m_2s^2 + cs + k_1 + k_2} X_1(s) \\ &= G_2(s)F(s) + G_3(s)X_1(s) \end{aligned}$$

Assim, a função de transferência resulta

$$T(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_3(s)}$$

ou seja,

$$T(s) = \frac{cs + k_1}{m_1m_2s^4 + c(m_1 + m_2)s^3 + (k_1m_2 + k_1m_1 + k_2m_1)s^2 + k_2cs + k_1k_2}$$

(3.3)

A seguir, apresenta-se um modelo de dois graus de liberdade [Hac and Young, 1993; Inman, 1994; Tamboli, 1999] para o veículo da Fig. 3.4. Um modelo simplificado para este sistema é mostrado na Fig. 3.5 sendo c.g. o centro de gravidade.

**Fig. 3.4 – Modelo de vibração para o movimento angular e vertical de um automóvel [Inman, 1994].**

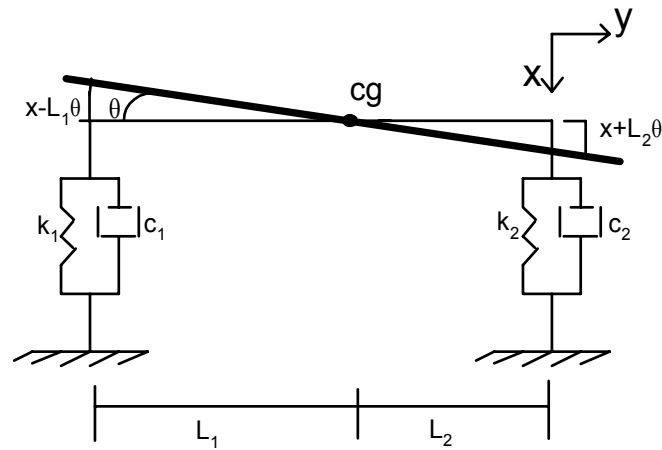
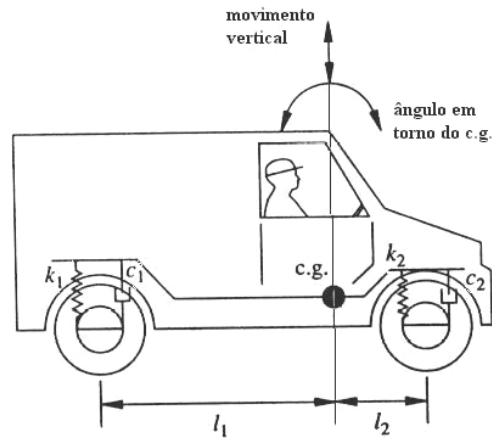


Fig. 3.5 – Sistema massa-mola-amortecedor para dois graus de liberdade da Fig. 3.4

O projeto da suspensão do veículo da Fig. 3.4 pode ser simplificado considerando a massa total do mesmo concentrada no centro de gravidade (c.g.), e a junção do pneu com a roda é aproximada como um sistema massa-amortecedor simples. A rotação do veículo no plano  $x$ - $y$  é descrita pelo ângulo  $\theta(t)$  e o deslocamento para cima e para baixo é dado por  $x(t)$  [Inman, 1994].

Usando a segunda lei de Newton, somando as forças na direção  $x$ , obtém-se:

$$m\ddot{x} = -c_1(\dot{x} - L_1\dot{\theta}) - c_2(\dot{x} + L_2\dot{\theta}) - k_1(x - L_1\theta) - k_2(x + L_2\theta) \quad (3.4)$$

onde a mola  $k_1$  experimenta um deslocamento dado por  $(x - L_1\theta)$  e  $k_2$  por  $(x + L_2\theta)$ . Similarmente, a velocidade experimentada pelo amortecedor de constante  $c_1$  é  $(\dot{x} - L_1\dot{\theta})$  e do amortecedor  $c_2$  é  $(\dot{x} + L_2\dot{\theta})$ . Tomando o momento relativo ao centro de gravidade resulta em:

$$I\ddot{\theta} = c_1 L_1 (\dot{x} - L_1 \dot{\theta}) - c_2 L_2 (\dot{x} + L_2 \dot{\theta}) + k_1 L_1 (x - L_1 \theta) - k_2 L_2 (x + L_2 \theta) \quad (3.5)$$

onde o momento de inércia relativo ao eixo longitudinal do veículo é  $I = mr^2$ , sendo  $r$  o raio de giro (indica a distribuição da massa do corpo). As equações (3.4) e (3.5) podem ser reescritas como:

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (L_2 c_2 - L_1 c_1)\dot{\theta} + (k_1 + k_2)x + (L_2 k_2 - L_1 k_1)\theta = 0 \quad (3.6)$$

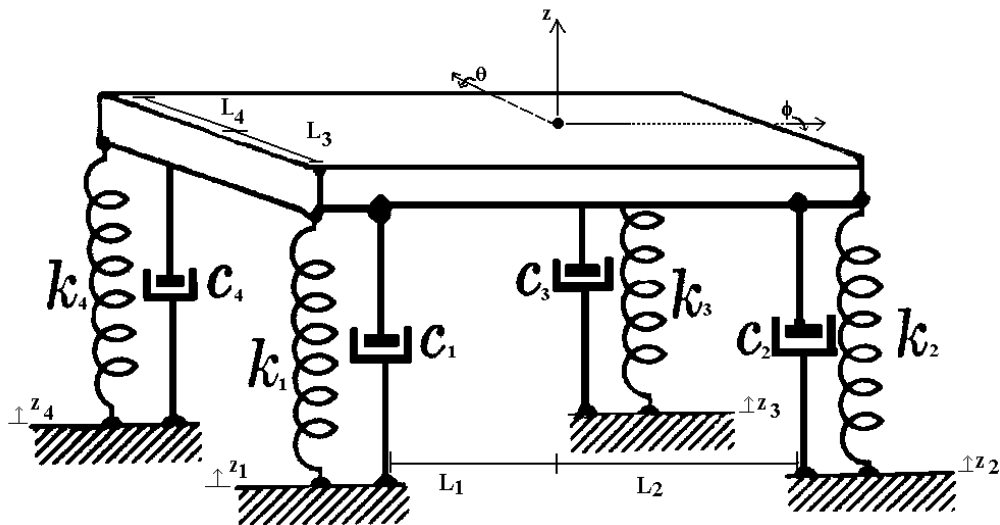
$$mr^2\ddot{\theta} + (c_2 L_2 - c_1 L_1)\dot{x} + (L_2^2 c_2 + L_1^2 c_1)\dot{\theta} + (k_2 L_2 - k_1 L_1)x + (L_1^2 k_1 + L_2^2 k_2)\theta = 0$$

A seguir será introduzido o modelo dinâmico com três graus de liberdade baseado em um modelo simplificado para a suspensão de um automóvel. Usou-se a equação de Lagrange para obter as equações do movimento.

### 3.4 - Sistemas com três graus de liberdade

Sistemas que requerem três coordenadas independentes para especificar a sua posição são chamados sistemas de três graus de liberdade. Para descrever um modelo de suspensão de um automóvel, usa-se um modelo simplificado conforme mostrado na figura 3.6.

Fig. 3.6 – Modelo para sistema de suspensão com três graus de liberdade.



As equações do movimento para este sistema podem ser obtidas a partir do formalismo Lagrangeano, o qual necessita das energias cinética e potencial obtidas na forma:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_x\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_y\dot{\theta}^2$$

(3.7)

$$E_p = \frac{1}{2}k_1z_1^2 + \frac{1}{2}k_2z_2^2 + \frac{1}{2}k_3z_3^2 + \frac{1}{2}k_4z_4^2$$

(3.8)

onde

$$z_1 = z - L_3\phi + L_1\theta$$

(3.9)

$$z_2 = z - L_3\phi - L_2\theta$$

(3.10)

$$z_3 = z + L_4\phi - L_2\theta$$

(3.11)

$$z_4 = z + L_4\phi + L_1\theta$$

(3.12)

de forma que

$$\dot{z}_1 = \dot{z} - L_3\dot{\phi} + L_1\dot{\theta}$$

(3.13)

$$\dot{z}_2 = \dot{z} - L_3\dot{\phi} - L_2\dot{\theta}$$

(3.14)

$$\dot{z}_3 = \dot{z} + L_4\dot{\phi} - L_2\dot{\theta}$$

(3.15)

$$\dot{z}_4 = \dot{z} + L_4\dot{\phi} + L_1\dot{\theta}$$

(3.16)

e o Lagrangeano é escrito como:

$$L = E_c - E_p$$

(3.17)

onde

$$L = L(z, \theta, \phi, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = \sum_j Q_j$$

(3.18)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \sum_k Q_k$$

(3.19)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_i Q_i$$

(3.20)

Via equação (3.17) obtém-se

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_y \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 z_1^2 - \frac{1}{2} k_2 z_2^2 - \frac{1}{2} k_3 z_3^2 - \frac{1}{2} k_4 z_4^2$$

e usando a equação (3.18), resulta

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - c_1(\dot{z} - L_3 \dot{\phi} + L_1 \dot{\theta}) - c_2(\dot{z} - L_3 \dot{\phi} - L_2 \dot{\theta}) -$$

$$c_3(\dot{z} + L_4 \dot{\phi} - L_2 \dot{\theta}) - c_4(\dot{z} + L_4 \dot{\phi} + L_1 \dot{\theta})$$

(3.21)



tal que o lado direito da equação (3.21) mostra as forças atuantes  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$  que são aplicadas em cada apoio do automóvel, adicionadas das forças de atrito, para  $z = z(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{\partial L}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial z_4} \frac{\partial z_4}{\partial z} \\ &= -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 - k_4 z_4\end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m \ddot{z}$$

Desta forma, a equação na direção  $z$  é dada por:

$$\begin{aligned}m \ddot{z} + k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 + k_4 z_4 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ &\quad - c_1 \dot{z}_1 - c_2 \dot{z}_2 - c_3 \dot{z}_3 - c_4 \dot{z}_4\end{aligned}$$

(3.22)

Utilizando a equação (3.19) tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = (f_3 + f_4)L_4 - (f_1 + f_2)L_3 - (c_1 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2)L_3 + (c_3 \dot{z}_3 + c_4 \dot{z}_4)L_4$$

tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \phi} &= \frac{\partial L}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial \phi} + \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial \phi} + \frac{\partial L}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial \phi} + \frac{\partial L}{\partial z_4} \frac{\partial z_4}{\partial \phi} \\ &= (k_1 z_1 + k_2 z_2)L_3 - (k_3 z_3 + k_4 z_4)L_4\end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = I_x \ddot{\phi}$$

Então, a equação na direção  $\phi$  é dada por:

$$\begin{aligned}I_x \ddot{\phi} - (k_1 z_1 + k_2 z_2)L_3 + (k_3 z_3 + k_4 z_4)L_4 &= (f_3 + f_4)L_4 - (f_1 + f_2)L_3 - \\ &\quad (c_1 \dot{z}_1 + c_2 \dot{z}_2)L_3 + (-c_3 \dot{z}_3 + c_4 \dot{z}_4)L_4\end{aligned} \quad (3.23)$$

Agora, utilizando a equação (3.20), obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = (f_1 + f_4)L_1 - (f_2 + f_3)L_2 - (c_1 \dot{z}_1 + c_4 \dot{z}_4)L_1 - (c_2 \dot{z}_2 + c_3 \dot{z}_3)L_2$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{\partial L}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial \theta} + \frac{\partial L}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial \theta} + \frac{\partial L}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial \theta} + \frac{\partial L}{\partial z_4} \frac{\partial z_4}{\partial \theta} \\ &= (k_2 z_2 + k_3 z_3) L_2 - (k_1 z_1 + k_4 z_4) L_1\end{aligned}$$

onde

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_x \ddot{\theta}$$

Assim, a equação na direção  $\theta$  resulta em:

$$\begin{aligned}I_x \ddot{\theta} - (k_2 z_2 + k_3 z_3) L_2 + (k_1 z_1 + k_4 z_4) L_1 &= (f_1 + f_4) L_1 - (f_2 + f_3) L_2 - \\ &\quad (c_1 \dot{z}_1 + c_4 \dot{z}_4) L_1 - (c_2 \dot{z}_2 + c_3 \dot{z}_3) L_2\end{aligned}\quad (3.24)$$

Substituindo  $z_1, z_2, z_3, z_4$  e  $\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4$  nas equações (3.22), (3.23) e (3.24) pode-se reescrever as equações na direção  $z$ ,  $\phi$  e  $\theta$ , respectivamente, como:

**Equação na direção  $z$ :**

$$\begin{aligned}m \ddot{z} + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) z + (-k_1 L_3 - k_2 L_3 + k_3 L_4 + k_4 L_4) \phi + \\ (k_1 L_1 - k_2 L_2 - k_3 L_2 + k_4 L_1) \theta + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \dot{z} + \\ (c_3 L_4 + c_4 L_4 - c_1 L_3 - c_2 L_3) \dot{\phi} + \\ (c_1 L_1 - c_2 L_2 - c_3 L_2 + c_4 L_1) \dot{\theta} = f_1 + f_2 + f_3 + f_4\end{aligned}\quad (3.25)$$

**Equação na direção  $\phi$ :**

$$\begin{aligned}I_x \ddot{\phi} + (k_3 L_4 - k_4 L_4 - k_1 L_3 - k_2 L_3) z + (k_1 L_3^2 + k_2 L_3^2 + k_3 L_4^2 + k_4 L_4^2) \phi + \\ (k_2 L_2 L_3 - k_1 L_1 L_3 - k_3 L_2 L_4 + k_4 L_1 L_4) \theta + (c_1 L_3 - c_2 L_3 + c_3 L_4 + c_4 L_4) \dot{z} + \\ (c_3 L_4^2 + c_4 L_4^2 + c_1 L_3^2 + c_2 L_3^2) \dot{\phi} + (-c_1 L_1 L_3 + c_2 L_2 L_3 - c_3 L_2 L_4 + c_4 L_1 L_4) \dot{\theta} = \\ (f_3 + f_4) L_4 - (f_1 + f_2) L_3\end{aligned}\quad (3.26)$$

**Equação na direção  $\theta$**

$$\begin{aligned}I_y \ddot{\theta} + (k_1 L_1 + k_4 L_1 - k_2 L_2 - k_3 L_2) z + (k_2 L_2 L_3 - k_3 L_4 L_2 - k_1 L_3 L_1 + k_4 L_4 L_1) \phi + \\ (c_2 L_3 L_2 - c_3 L_4 L_2 + c_4 L_4 L_1 - c_1 L_3 L_1) \dot{\phi} + (k_2 L_2^2 + k_3 L_2^2 + k_1 L_1^2 + k_4 L_1^2) \theta +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (c_1 L_1 - c_2 L_2 - c_3 L_2 + c_4 L_1) \ddot{x} + (c_1 L_1^2 + c_4 L_1^2 + c_2 L_2^2 + c_3 L_2^2) \ddot{\theta} = (f_1 + f_4) L_1 - \\ & (f_2 + f_3) L_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na próxima seção obtém-se as soluções analítica e numérica para o modelo simplificado mostrado na Fig. 3.5.

### 3.5 - Soluções analítica e numérica para sistema com dois graus de liberdade

A seguir, obtém-se uma solução analítica para um sistema com dois graus de liberdade usando o modelo simplificado mostrado na Fig. 3.5; após calcula-se a solução numérica para finalmente fazer a comparação entre estas.

#### 3.5.1 - Solução analítica do modelo de dois graus de liberdade

Trata-se de uma solução para o caso homogêneo, onde  $f(t)=0$  (não há força externa). Assim, na forma matricial, as equações (3.6) acopladas tornam-se

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & L_2 c_2 - L_1 c_1 \\ L_2 c_2 - L_1 c_1 & L_2^2 c_2 + L_1^2 c_1 \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 L_2 - k_1 L_1 \\ k_2 L_2 - k_1 L_1 & L_1^2 k_1 + L_2^2 k_2 \end{bmatrix} q = 0 \quad (3.28)$$

onde o vetor  $q$  é definido por

$$q = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

Se um momento  $\delta(t)$  (impulso unitário) é aplicado na coordenada angular  $\theta(t)$ , as equações do movimento resultam em:

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & L_2 c_2 - L_1 c_1 \\ L_2 c_2 - L_1 c_1 & L_2^2 c_2 + L_1^2 c_1 \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 L_2 - k_1 L_1 \\ k_2 L_2 - k_1 L_1 & L_1^2 k_1 + L_2^2 k_2 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e seguindo o processo usual da análise modal, o cálculo de  $M^{-1/2}$  é [Inman, 1994]

$$M^{-1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r\sqrt{m}} \end{bmatrix}$$

onde  $m$  é a massa do veículo, assim

$$\tilde{c} = M^{-1/2} c M^{-1/2}$$

$$\tilde{k} = M^{-1/2} k M^{-1/2}$$

Os autovalores de  $\tilde{k}$  são as raízes da equação característica  $\det(\tilde{k} - \lambda I) = 0$ . Resolvendo o problema de autovalores para  $\tilde{k}$ , tem-se

$$P_1 = [V_1 \quad V_2]$$

sendo  $P_1$  matriz ortogonal, tal que

$$V_1 = [v_1 \quad v_2]^T$$

$$V_2 = [v_3 \quad v_4]^T$$

onde  $V_1$  e  $V_2$  são os autovetores normalizados de  $\tilde{k}$  e  $\lambda_{i\tilde{k}}$  os seus autovalores correspondentes, tal que  $i = 1, 2$ . As frequências naturais são definidas por:

$$w_1 = \sqrt{\lambda_1} \text{ rad} / s$$

$$w_2 = \sqrt{\lambda_2} \text{ rad} / s$$

de forma que

$$A_1 = P_1^T \tilde{k} P_1 = \text{diag}[\lambda_{1\tilde{k}} \quad \lambda_{2\tilde{k}}]$$

é a matriz diagonal dos autovalores de  $\tilde{k}$ ; de maneira análoga

$$A_2 = P_2^T \tilde{c} P_2 = \text{diag}[\lambda_{1\tilde{c}} \quad \lambda_{2\tilde{c}}]$$

é a matriz diagonal dos autovalores de  $\tilde{c}$ .

Comparando os elementos de  $P_2^T \tilde{c} P_2$  com  $w_1$  e  $w_2$  tem-se a taxa de amortecimento modal

$$\xi_1 = \frac{\lambda_{1\tilde{c}}}{2w_1}$$

$$\xi_2 = \frac{\lambda_{2\tilde{c}}}{2w_2}$$

A fórmula para a frequência natural amortecida, é dada por:

$$w_{d1} = w_1 \sqrt{1 - \xi_1^2} \text{ rad / s}$$

$$w_{d2} = w_2 \sqrt{1 - \xi_2^2} \text{ rad / s}$$

As forças modais são calculadas de

$$P_1^T M^{-1/2} F(t) = P_1^T M^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde o produto da equação (3.30) resulta numa nova matriz de ordem 2x1, ou seja

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \delta(t)$$

Desta forma, as equações modais desacopladas, tornam-se

$$\ddot{r}_1(t) + (\lambda_{1\bar{c}}) \dot{r}_1(t) + (\lambda_{1\bar{k}}) r_1(t) = a_{11} \delta(t)$$

$$\ddot{r}_2(t) + (\lambda_{2\bar{c}}) \dot{r}_2(t) + (\lambda_{2\bar{k}}) r_2(t) = a_{22} \delta(t)$$

sendo que elas têm solução do tipo:

$$r_1(t) = \frac{1}{mw_{d1}} e^{-\xi_1 w_1 t} \sin(w_{d1} t)$$

$$r_2(t) = \frac{1}{mw_{d2}} e^{-\xi_2 w_2 t} \sin(w_{d2} t)$$

A solução em coordenadas físicas é obtida de

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = M^{-1/2} P_1 r(t) \quad (3.31)$$

Determina-se valores razoáveis para uma camionete para serem substituídos na equação (3.6), dados por:

$$r^2 = 0.64 m^2$$

$$m = 4000 kg$$

$$c_1 = c_2 = 2000 N.s / m$$

$$k_1 = k_2 = 20.000 N / m$$

$$L_1 = 0.9 m$$

$$L_2 = 1.4 m$$

$$w_1 = 3.0355 \text{rad} / s$$

$$w_2 = 4.7357 \text{rad} / s$$

$$\xi_1 = 0.1518$$

$$\xi_2 = 0.2369$$

$$w_{d1} = 3.0003 \text{rad} / s$$

$$w_{d2} = 4.6009 \text{rad} / s$$

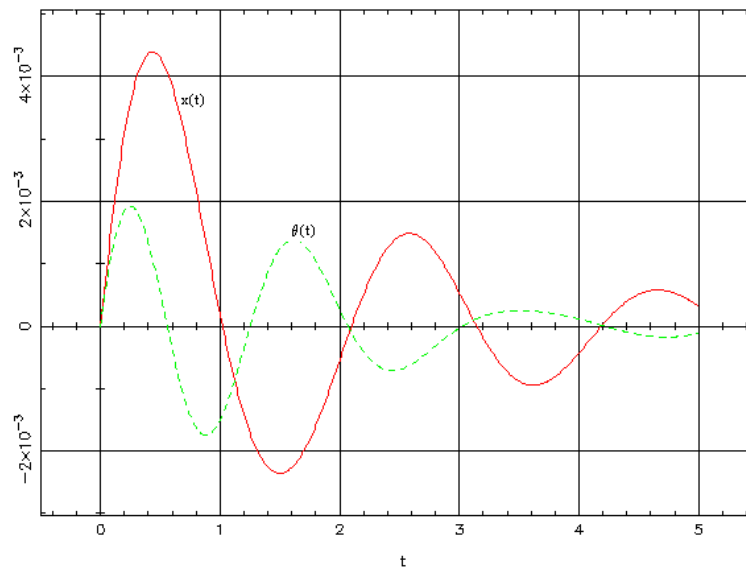
que implica em

$$x(t) = 0.0050e^{-0.4608t} \sin(3.0003t) + 0.0008e^{-1.1219t} \sin(4.6009t) \quad (3.32)$$

$$\theta(t) = 0.0016e^{-0.4608t} \sin(3.0003t) + 0.0042e^{-1.1219t} \sin(4.6009t) \quad (3.33)$$

As equações (3.32) e (3.33) são a solução analítica do modelo da Fig. 3.6. Assim, pode-se plotar o gráfico das oscilações, tanto para  $x$  como para o ângulo  $\theta$  em  $t$  (tempo), conforme mostra a Fig. 3.7. Nota-se que o gráfico de  $x(t)$  tem amplitude maior e oscila mais em relação ao gráfico de  $\theta(t)$ .

**Fig. 3.7 – Solução analítica para  $x$  e  $\theta$  para o modelo de uma camionete**



Procedendo de forma semelhante, as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento para um sistema com três graus de liberdade seriam:

$$w_1 = 2.0896rad / seg \quad \xi_1 = 0.1045$$

$$w_2 = 4.0385rad / seg \quad \xi_2 = 0.1212$$

$$w_3 = 6.7260rad / seg \quad \xi_3 = 4.0385$$

Na próxima seção apresenta-se a solução numérica obtida para o modelo de dois graus de liberdade.

### 3.5.2 – Solução numérica do modelo de dois graus de liberdade

Como procedimento para determinar a solução numérica utilizou-se inicialmente o método de integração de Houbolt (de 2<sup>a</sup> ordem) [Cook, 1981; Bathe, 1982], que usa expansões em diferenças para aproximar as componentes da aceleração e velocidade em termos das componentes do deslocamento, ou seja:

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} \{2U^{t+\Delta t} - 5U^t + 4U^{t-\Delta t} - U^{t-2\Delta t}\} \quad (3.34)$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} \{11U^{t+\Delta t} - 18U^t + 9U^{t-\Delta t} - 2U^{t-2\Delta t}\} \quad (3.35)$$

resultando em ( para  $U = (x, \theta)$  )

$$m\ddot{x}^{t+\Delta t} + c\dot{x}^{t+\Delta t} + kx^{t+\Delta t} = R_x^{t+\Delta t} \quad (3.36)$$

e

$$m\ddot{\theta}^{t+\Delta t} + c\dot{\theta}^{t+\Delta t} + k\theta^{t+\Delta t} = R_\theta^{t+\Delta t}$$

onde

$$c = c_1 + c_2$$

$$k = k_1 + k_2$$

sendo m, c e k constantes.

Após a substituição de (3.34) e (3.35) em (3.36) obtém-se as equações aproximadas no tempo. Para a equação em x resulta

$$x^{t+\Delta t} \left[ \frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{11}{6\Delta t} c + k \right] = x^t \left[ \frac{5M}{\Delta t^2} + \frac{3}{\Delta t} c \right] - x^{t-\Delta t} \left[ \frac{4M}{\Delta t^2} + \frac{3}{2\Delta t} c \right] + x^{t-2\Delta t} \left[ \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{1}{3\Delta t} c \right] + \theta^t \left[ \frac{3}{\Delta t} (c_2 L_2 - c_1 L_1) \right] +$$



$$\theta^{t+\Delta t} \left[ \frac{11}{6\Delta t} (c_1 L_1 - c_2 L_2) + (k_1 L_1 - k_2 L_2) \right] +$$

$$\theta^{t-\Delta t} \left[ \frac{3}{2\Delta t} (c_1 L_1 - c_2 L_2) \right] + \theta^{t-2\Delta t} \left[ \frac{1}{3\Delta t} (c_2 L_2 - c_1 L_1) \right]$$

A constante  $k$  para o tempo  $t + \Delta t$  é:

$$\hat{k} = \frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{11}{6\Delta t} c + k$$

onde as cargas efetivas para o tempo  $t + \Delta t$  são:

$$\hat{R}^{t+\Delta t} = R^{t+\Delta t} + \frac{5M}{\Delta t^2} x^t - \frac{4M}{\Delta t^2} x^{t-\Delta t} + \frac{M}{\Delta t^2} x^{t-2\Delta t} +$$

$$\frac{3}{\Delta t} c x^t - \frac{3}{2\Delta t} c x^{t-\Delta t} + \frac{c}{3\Delta t} x^{t-2\Delta t}$$

e

$$R^{t+\Delta t} = \theta^t \left[ \frac{3}{\Delta t} (c_2 L_2 - c_1 L_1) \right] + \theta^{t+\Delta t} \left[ \frac{11}{6\Delta t} (c_1 L_1 - c_2 L_2) + k_1 L_1 - k_2 L_2 \right] +$$

$$\theta^{t-\Delta t} \left[ \frac{3}{2\Delta t} (c_1 L_1 - c_2 L_2) \right] + \theta^{t-2\Delta t} \left[ \frac{1}{3\Delta t} (c_2 L_2 - c_1 L_1) \right]$$

Então, a carga efetiva para o tempo  $t + \Delta t$  é:

$$x^{t+\Delta t} = \frac{\hat{R}^{t+\Delta t}}{\hat{k}}$$

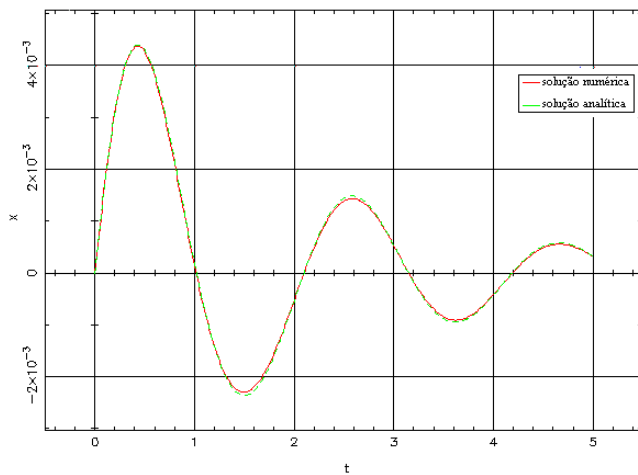
(3.37)

Procedendo de forma semelhante obtém-se a equação para  $\theta$ , que resulta em

$$\theta^{t+\Delta t} = \frac{\hat{R}_t^{t+\Delta t}}{\hat{k}_t}$$

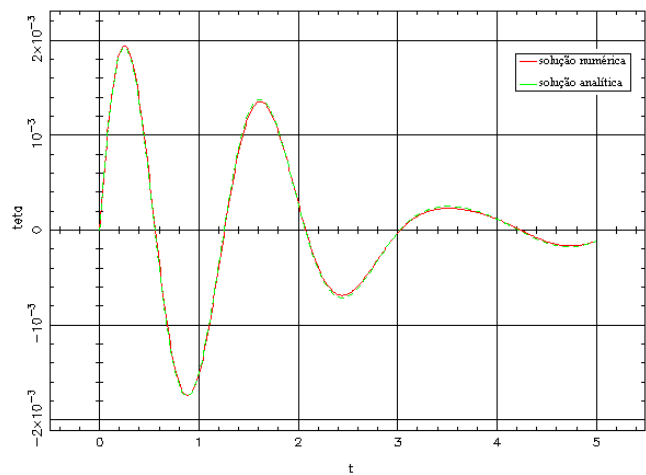
(3.38)

A seguir, compara-se a solução analítica com a numérica como mostram as Figs. 3.8 e 3.9, respectivamente. Nota-se que o método utilizado para determinar a solução numérica foi eficiente, pois ambas soluções (analítica e numérica) são quase idênticas. Resultado semelhante é obtido utilizando as rotinas de integração numéricas do MATLAB (Runge-Kutta 4ª ordem, com controle automático do passo de integração) a menor custo, sendo por isso o software adotado.



**Fig.3.8 – Comparação da solução analítica e numérica**

**e numérica na direção  $x$**



**Fig.3.9 – Comparação da solução analítica e**

**para o ângulo  $\theta$**

O próximo capítulo apresenta noções de três tipos de controle: clássico, por alocação de pólos e LQR para um sistema de três graus de liberdade.

## 4 - NOÇÕES SOBRE CONTROLE

O controle representa um papel vital no avanço da ciência e da tecnologia e é necessário, na presença de distúrbios, para reduzir a diferença entre a saída de um sistema e a entrada de referência, podendo operar com base nesta diferença. Os avanços na teoria e na prática de controle propiciam meios para atingir o desempenho ótimo de sistemas dinâmicos. Um sistema de controle deve ser capaz de reduzir os erros a zero ou a algum valor pequeno tolerável.

Na próxima seção será indicado que a solução para um problema de controle pode não existir se o sistema considerado não é controlável ou observável. Embora a maioria dos sistemas físicos sejam controláveis e observáveis, os modelos matemáticos correspondentes podem não ter a propriedade de controlabilidade e/ou de observabilidade. Então, é necessário saber as condições nas quais um sistema é controlável e observável.

### 4.1 – Controlabilidade e observabilidade de um sistema

Dado um sistema de controle na forma de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde A, B e C são matrizes constantes (massa, rigidez, etc.) e  $x$  é o vetor de estado, sendo  $A : n \times n$ ,  $B : n \times r$ ,  $C : r \times n$ . A controlabilidade e a observabilidade deste sistema pode ser verificada analisando-se o posto das seguintes matrizes [Inman, 1994]:

$$\lambda(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{G}(A, B) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

sendo (4.1) a matriz de controlabilidade e (4.2) a matriz de observabilidade. Assim, um sistema é dito controlável e observável se os postos das matrizes  $\lambda(A, B)$  e  $\mathcal{G}(A, C)$  forem iguais ao número de linhas da matriz A. Para exemplificar, usa-se um sistema com um grau de liberdade, para o qual as matrizes A, B e C são definidas, por exemplo, como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2w^2 & -4w\xi \end{bmatrix}$$

tal que  $w = 3.0355 \text{ rad/s}$  e  $\xi = 0.1518$  (para o caso da camionete)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

Assim, o sistema de controle é observável e controlável se, e somente se, o posto de  $[\mathcal{G}(A, C)]$  e  $[\lambda(A, B)]$  forem iguais a  $n = 2$ ; ou seja,

$$\mathcal{G}(A, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.84 \end{bmatrix}$$

Logo, como o postos de  $[\mathcal{G}(A, C)] = 2$  e de  $[\lambda(A, B)] = 2$  o sistema é dito observável e controlável. Sistemas que possuem todos os autovalores distintos e diferentes de zero são controláveis [Inman, 1994].

Para mostrar um contra exemplo, define-se uma matriz  $A_1$  tal que:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2w^2 & -4w\xi \end{bmatrix}$$

como o posto de  $[\lambda(A_1, C)] = 1$  e o posto de  $[\mathcal{G}(A_1, B)] = 1$  o sistema não é controlável e nem observável.

Na seção seguinte será obtido o diagrama de Bode via representações gráficas do módulo e do ângulo de fase da função de transferência, ambos traçados como uma função da frequência  $w$ .

#### 4.2 - Diagramas de Bode

Os diagramas de Bode indicam a estabilidade relativa de um sistema e são usados na análise e projeto de controle, pois a sua principal vantagem sobre os outros tipos

de representações de resposta em frequência é que os efeitos da adição de um pólo real ou um zero real na função de transferência podem ser identificados mais facilmente [Distefano et al., 1979].

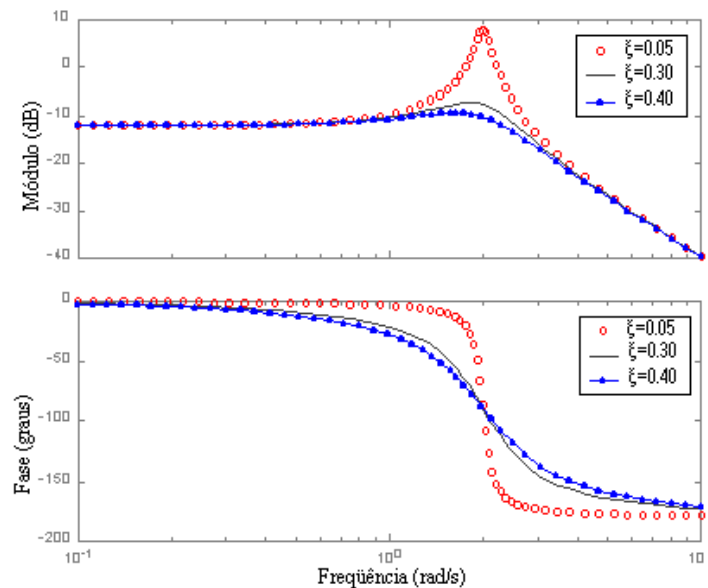
Os diagramas aqui abordados são obtidos a partir da função de transferência e consistem de dois gráficos: o módulo de  $G(j\omega)$  e o ângulo de fase de  $G(j\omega)$ , ambos traçados como uma função da frequência  $\omega$ . As escalas logarítmicas são geralmente usadas para os eixos de frequência e para o módulo de  $G(j\omega)$  e são traçadas em unidade decibel ( $dB$ ) onde

$$dB \equiv 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

Tomando-se como exemplo a dinâmica do automóvel (1gdl) dada pela equação (3.2), ou seja,

$$G(s) = \frac{I}{s^2 + 2\omega_s \xi + \omega^2}$$

pode-se construir o diagrama de Bode para o módulo de  $G(j\omega)$ , como mostrado na Fig. 4.1, onde se usa  $\omega = 2$  e os seguintes valores para  $\xi$ :  $\xi = 0.05$ ,  $\xi = 0.30$  e  $\xi = 0.40$ .



**Fig.4.1 – Diagramas de Bode para sistema com um grau de liberdade, onde  $\omega=2$  e  $\xi = 0.05, 0.30$  e  $0.40$**

A partir da figura 4.1 pode-se observar que para  $\xi > 0.3$  não há pico de ressonância e que as curvas plotadas mostram que o fator de amortecimento tem uma grande influência

na amplitude e no ângulo de fase, na zona de frequências próximas à ressonância. Sendo assim, um pequeno coeficiente de amortecimento corresponde a um pico de ressonância [Bolton, 1995].

A seguir é plotado o diagrama de Bode para a função de transferência dada pela equação (3.3), a qual representa o modelo de uma roda de um automóvel onde

$$m_1 = 1000kg$$

$$m_2 = 30kg$$

$$c = 1000N.s/m$$

$$k_1 = k_2 = 10000N/m$$

$$w = 2rad/seg$$

Na Fig. 4.2 observa-se que com o aumento da frequência há uma diminuição tanto no módulo quanto no ângulo de fase da função de transferência.

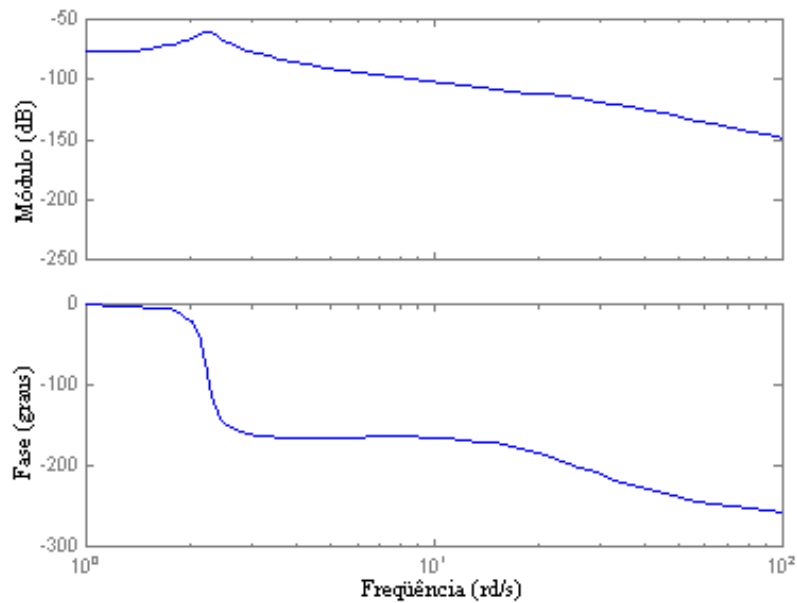


Fig.4.2 – Diagrama de Bode para sistema com dois graus de liberdade para o modelo de uma roda de automóvel

Plota-se também (Fig. 4.3) o diagrama de Bode para um sistema amortecido com dois graus de liberdade, para o qual as equações do movimento podem ser escritas na forma matricial dada por (conforme figuras 3.4 e 3.5 (modelo de uma camionete)):

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & L_2 c_2 - L_1 c_1 \\ L_2 c_2 - L_1 c_1 & L_2^2 c_2 + L_1^2 c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 L_2 - k_1 L_1 \\ k_2 L_2 - k_1 L_1 & L_1^2 k_1 + L_2^2 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o sistema terá dois autovalores dados por [Sampaio et al., 1997]:

$$\Omega_r = w_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad r = 1, 2$$

onde  $\Omega_r$  é apenas a parte imaginária dos autovalores e  $w_r$  é a frequência natural, do modo  $r$  do sistema conservativo associado, tal que:

$$\xi_r = \frac{\beta w_r}{2} + \frac{\gamma}{2 w_r}$$

e

$$w_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$$

A função resposta em frequência do sistema terá entradas dadas por

$$\alpha_{il}(w) = \sum_{r=1}^N \frac{(\varphi_{ri})(\varphi_{rl})}{(k_r - w^2 m_r) + j(w c_r)}$$

onde  $c_r = \beta k_r$  e  $\beta = 3 \times 10^{-5}$  ( $\beta$  é parâmetro do modelo de 2gdl); assim tem-se

$$m = \begin{bmatrix} 4000 & 0 \\ 0 & 2560 \end{bmatrix}$$

e

$$k = \begin{bmatrix} 40000 & 10000 \\ 10000 & 55400 \end{bmatrix}$$

o que implica em

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.032 & -0.492 \end{bmatrix}$$

Sendo  $k_r = \varphi^T k \varphi$ , obtém-se

$$k_r = 10^3 \begin{bmatrix} 309.38 & 0.02 \\ 0.02 & 43.56 \end{bmatrix}$$

e

$$[c_r] = \begin{bmatrix} 9.28 & .0006 \\ .0008 & 1.30 \end{bmatrix}$$

onde

$$[\xi_r] = \frac{1}{2} \beta [w_r]$$

ou seja,

$$[\xi_r] = \begin{bmatrix} 0.0036 & 0 \\ 0 & 0.002 \end{bmatrix}$$

e

$$\sqrt{1 - \xi^2} [w_r^2] = \begin{bmatrix} 245.60 & 0 \\ 0 & 187.29 \end{bmatrix}$$

A matriz  $[\alpha_{ik}]$  terá elementos dados por:

$$\alpha_{ik}(w) = \sum_{r=1}^2 \frac{(\varphi_{ri})(\varphi_{rk})}{(k_r - w^2 m_r) + j(w c_r)}$$

Considerando, em particular, as funções resposta em frequência  $\alpha_{11}(w)$  e  $\alpha_{12}(w)$ ,  
tem-se:



$$\alpha_{11}(w) = \frac{1}{20000 - 4000w^2 + 2000jw} + \frac{4.12}{20000 - 2560w^2 + 2000jw}$$

$$\alpha_{12}(w) = \frac{1}{20000 - 4000w^2 + 2000jw} - \frac{0.99}{20000 - 2560w^2 + 2000jw}$$

O gráfico de  $20 \log|\alpha_{11}(w)| \times \log(w)$  é mostrado na figura 4.3, tal que as amplitudes são dadas em dB, para o modelo de uma camionete. Não surgem picos, pois os dois modos de vibração estão amortecidos devido ao amortecimento natural do sistema.

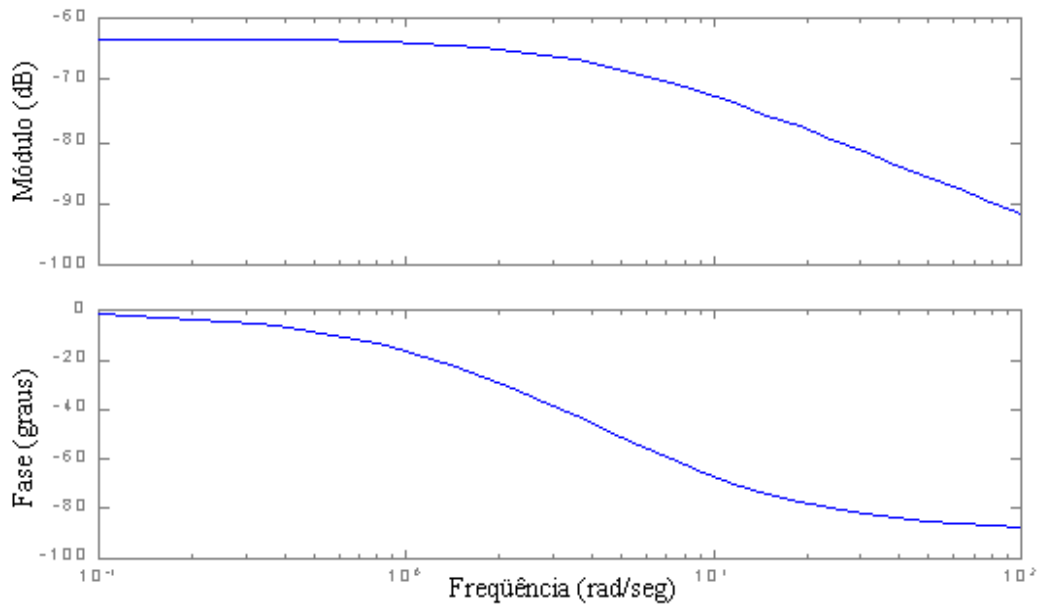


Fig. 4.3 – Diagrama de Bode para a função de transferência  $\alpha_{11}(w)$

Na próxima seção serão introduzidos os controles, clássico, por alocação de pólos e LQR, pois é necessário que o sistema responda de alguma maneira controlada às entradas aplicadas e às condições iniciais.

### 4.3 – Controle Clássico

A literatura [Franklin e Powell, 1995] refere-se ao controle clássico como sendo aquele projetado nos domínios do tempo ou frequência, com retorno de saída, que não envolve nenhum processo de otimização baseado em cálculo variacional.

No caso mais geral os sistemas de controle podem ser do tipo multi-entrada e multi-saída (MIMO) conforme mostra a Fig. 4.4

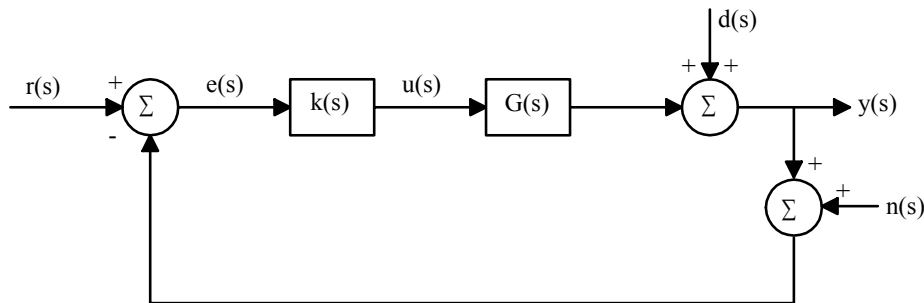


Fig. 4.4 – Diagrama de blocos para um sistema MIMO [Cruz, 1996].

A nomenclatura utilizada nesta figura é definida como:

- $G(s)$  é a função de transferência de malha aberta da planta;
- $K(s)$  corresponde à função de transferência do compensador;
- $r(s)$  é o sinal de referência;
- $e(s)$  é o sinal de erro;
- $u(s)$  é o sinal de controle;
- $d(s)$  é a perturbação refletida na saída da planta;
- $n(s)$  é o erro de medida (ruído de medida);
- $y(s)$  é o sinal de saída.

tal que

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K(s)$$

é a função de transferência do controlador. A relação entre a saída e a entrada do controlador é chamada de lei de controle. Existem três ações básicas de controle clássico [Ogata, 1990; Bolton, 1995; Phillips e Harbor, 1996]:

- proporcional;

- derivativa;
- integral;

### **a) Controle Proporcional (P)**

No controle proporcional, a saída do controlador  $u(t)$  é diretamente proporcional a sua entrada, sendo esta o sinal de erro  $e(t)$ . Assim:

$$u(t) = K_p e(t)$$

ou, tomando a transformada de Laplace,

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

onde  $K_p$  é denominado ganho proporcional. A saída do controlador depende apenas da amplitude do erro no instante de tempo.

### **b) Controle Proporcional e Derivativo (PD)**

A ação de controle de um controlador proporcional e derivativo é definida pela seguinte equação, na qual verifica-se que parte da ação de controle é proporcional à derivada do erro.

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

sendo a função de transferência dada por:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$$

onde  $T_d$  é uma constante chamada de tempo derivativo, onde tanto  $K_p$  quanto  $T_d$  são ajustáveis.

### **c) Controle Proporcional Integral e Derivativo (PID)**

Um controlador PID em um sistema terá uma saída para uma entrada de um erro  $e$  dada por:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

onde a transformada de Laplace desta equação resulta na função de transferência:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

e  $T_i$  representa o tempo integral. Portanto, parte da ação de controle é proporcional à integral do erro (componente integral).

A próxima seção refere-se aos três tipos de controles implementados neste trabalho como o controle clássico projetado, por alocação de pólos e LQR.

#### 4.3.1 – Controle clássico projetado

Neste trabalho, foi implementado o controle proporcional com retorno de velocidade, o qual é equivalente ao controle PD para o caso de entradas de referência em degrau. O objetivo é atender às especificações de resposta transitória, tal que a razão de amortecimento e a velocidade de resposta sejam convenientes, ou seja, o sistema em malha fechada deve ter pólos mais amortecidos, atendendo assim às referidas especificações.

Neste caso, cada força de controle possui a forma:

$$F_i = K_p (Z_{ri} - Z_i) - K_d \dot{Z}_i$$

com  $i = 1, \dots, 4$ , onde 4 é o número de atuadores (um por roda), sendo  $Z_i$  a posição vertical do cilindro atuador (atuador hidráulico) e  $Z_{ri}$  a posição de referência.

A seguir é apresentado um método de projeto chamado de técnica de alocação ou imposição de pólos, o qual baseia-se no retorno do estado do sistema.

### 4.3.2 – Controle por alocação de pólos

Considere o sistema de controle na seguinte forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.3)$$

$$y = Cx \quad (4.4)$$

onde  $x$  representa o vetor de estado,  $u$  o sinal de controle aplicado ao sistema,  $A$  e  $B$  as matrizes obtidas do modelo dinâmico e  $C$  a matriz de observação. Com o objetivo de atenuar de forma ativa as vibrações estruturais, pode-se definir o sinal de controle como:

$$u = -K_r x \quad (4.5)$$

Esta ação de controle utiliza retroação (realimentação) de estado, onde  $K_r$  é um vetor de ganhos a ser determinado (via fórmula de Ackerman). Substituindo a equação (4.5) em (4.3) o sistema em malha fechada pode ser escrito a partir da seguinte equação:

$$\dot{x} = (A - BK_r)x \quad (4.6)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad B = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/m \quad 1/I_x \quad 1/I_y\}^T$$

sendo  $(A - BK_r)$  a matriz da dinâmica do sistema em malha fechada. A solução da equação (4.6) é dada por:

$$x(t) = e^{(A - BK_r)t} x(t_0)$$

onde  $x(t_0)$  é o estado inicial. A estabilidade e as características da resposta transitória são determinadas pelos autovalores da matriz  $(A - BK_r)$ , ou seja, a estabilidade deste sistema passa a ser determinada pelos sinais das partes reais dos seus autovalores. É necessário determinar o valor do vetor de ganhos  $K_r$  que fornece apenas autovalores com parte real negativa, para que a estabilidade seja mantida. Os autovalores são chamados pólos do regulador.

Para demonstrar a condição necessária e suficiente para alocação arbitrária de pólos é conveniente transformar as equações de estado (4.3) e (4.4) na forma canônica seguinte:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= A_c \mathbf{x}_c + B_c u \\ y &= C_c \mathbf{x}_c\end{aligned}$$

onde

$$A_c = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ M & M & M & O & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]$$

sendo  $a_i$  os coeficientes de  $n(s)$  e  $b_i$  os de  $d(s)$ , onde  $n(s)$  e  $d(s)$  são o numerador e denominador da função de transferência de malha aberta do sistema:

$$\frac{n(s)}{d(s)} = C[sI - A]^{-1} B$$

A equação característica em malha fechada para o novo sistema pode ser escrita na forma:

$$\det[sI - (A_c - B_c K_c)] = 0$$

onde

$$K_c = [K_{c1} \quad K_{c2} \quad K \quad K_{cn}]$$

Resultando na equação polinomial:

$$s^n + (a_1 + K_{c1})s^{n-1} + (a_2 + K_{c2})s^{n-2} + \Lambda + (a_n + K_{cn}) = 0 \quad (4.7)$$

supondo conhecidos os pólos desejados ( $s_i, i=1, \dots, n$ ). A equação característica é um polinômio cujas raízes são os pólos conhecidos do sistema em malha fechada:

$$\begin{aligned}\alpha_c(s) &= (s - s_1)K (s - s_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 + \alpha_n = 0\end{aligned}\quad (4.8)$$

Comparando as equações (4.7) e (4.8) obtém-se o vetor de ganhos

$$K_{ci} = -a_i + \alpha_i \quad i = 1, \dots, n$$

Como  $u = -K_r x$  e  $x = T x_c$ , então

$$u = -K_c x_c$$

Pelas equações (4.7) e (4.8) tem-se:

$$K_r = K_c T^{-1} \quad (4.9)$$

Portanto, a equação (4.9) expressa o vetor de ganhos  $K_r$ . Em resumo, o procedimento acima consiste em:

- I - Transformar o sistema (A,B,C) para a forma canônica a partir da troca  $x = T x_{can}$ .
- II - Determinar  $K_c$  tal que  $u = -K_c x_c$ .
- III - Encontrar  $K_r = K_c T^{-1}$ .

A fórmula de Ackerman [Franklin e Powell, 1995] organiza os três passos anteriores na seguinte forma:

$$K_r = [0 \quad 0 \quad K \quad 1] \begin{bmatrix} B & AB & K & A^{n-1}B \end{bmatrix} \alpha_c(A) \quad (4.10)$$

onde

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + K + \alpha_n I$$

e os  $\alpha_i$  são os coeficientes da equação (4.8).

A segunda matriz do lado direito da Eq. (4.10) é chamada matriz de controlabilidade. Para que o sistema seja controlável é necessário que o determinante da matriz de controlabilidade seja diferente de zero.

Assim, a equação (4.10) é conhecida como fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho de retroação  $K_r$ . Isto significa que, se o sistema é controlável, teoricamente, é possível alocar os pólos em qualquer lugar no plano complexo.

Até o momento, foi apresentada a abordagem de alocação de pólos no projeto de sistemas de controle; admitiu-se que todas as variáveis de estado eram conhecidas para retroação. Na prática, nem todas as variáveis de estado estão disponíveis para a retroação, levando assim à necessidade de projetar um estimador (observador) de estado que será denotado por  $\hat{x}$ . Assim, considerando o sistema dado pelas equações (4.3) e (4.4), a lei de controle tem agora a seguinte forma:

$$u = -K_r \hat{x}$$

Admite-se que o estado  $x$  deva ser estimado utilizando-se o próprio modelo dinâmico nominal do sistema, a partir da solução da seguinte equação diferencial:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \quad (4.11)$$

que representa o estimador de estado, onde  $C$  é a matriz de observação dada por:

$$C = [I \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad K \quad 0]$$

e

$$K_f = [k_{f1} \quad k_{f2} \quad \dots \quad k_{fn}]^T$$

é a matriz de ganhos do filtro.

Note que o estimador de estado (4.11) possui  $y$  e  $u$  como sinais de entrada e  $\hat{x}$  como sinal de saída. O último termo da eq. (4.11) é uma correção que envolve a diferença entre o



valor medido do sinal de saída  $y$  e o valor estimado do sinal de saída  $C\hat{x}$ .  $K_f$  funciona como uma matriz de ponderação, sendo a mesma escolhida de forma a obter um erro característico satisfatório. Para obter a equação de erro do estimador (observador), subtrai-se a equação (4.3) de (4.11), o que resulta em

$$\begin{aligned}\dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax - A\hat{x} - K_f(y - C\hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - K_f(Cx - C\hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A(x - \hat{x}) - K_f C(x - \hat{x}) \\ \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= (A - K_f C)(x - \hat{x})\end{aligned}\tag{4.12}$$

Define-se a diferença entre  $x$  e  $\hat{x}$  como sendo o vetor erro  $e$ , ou seja:

$$e = x - \hat{x}$$

Então, a equação (4.12) se torna

$$\dot{e} = (A - K_f C)e\tag{4.13}$$

Pela equação (4.13) percebe-se que os pólos do filtro são os autovalores da matriz  $(A - K_f C)$ . De maneira análoga à obtenção dos ganhos do regulador, o vetor  $K_f$  pode ser obtido pela fórmula de Ackerman [Franklin e Powell, 1995] como:

$$K_f = \alpha_e(A) \mathcal{G}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix}\tag{4.14}$$

sendo que

$$\mathcal{G} = [C \quad CA \quad \dots \quad I]$$

é a matriz de observabilidade, e

$$\alpha_e(A) = A^n + \kappa_1 A^{n-1} + \dots + \kappa_n I$$

é o polinômio característico desejado para o estimador, sendo  $\kappa_i$  os coeficientes do polinômio característico  $\alpha_e(s) = \det[sI - (A - K_f C)]$  (os pólos do filtro são supostos conhecidos). Assim, a equação (4.14) pode ser usada para calcular o vetor de ganhos do estimador.

Substituindo as equações (4.5) e (4.4) em (4.11) resulta em:

$$\dot{\hat{x}} = [A - BK_r - K_f C]\hat{x} + K_f y \quad (4.15)$$

tal que  $[A - BK_r - K_f C]$  é a matriz da dinâmica em malha fechada.

Considerando um estado ampliado a partir das equações (4.3) e (4.4) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_r \\ K_f C & A - BK_r - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

que contém as dinâmicas em malha fechada, tanto do regulador quanto do filtro.

Na próxima seção, para finalizar, introduz-se um tipo de controle ótimo, ou seja, o controle LQR.

### 4.3.3 - Controle Ótimo Baseado em Índices de Desempenho Quadráticos - LQR

Ao aplicar a sistemas controle ótimo, tem-se o objetivo de achar uma regra para a determinação da decisão do controle presente, sujeita a certas limitações, que minimizará alguma medida de um desvio de comportamento ideal, cujo valor indica quanto o desempenho atual do sistema se compara com o desejado. Na maioria dos casos particulares, o comportamento do sistema é otimizado escolhendo-se o vetor de controle de tal forma que o índice de desempenho é minimizado (maximizado). Tal índice é importante porque determina, em grande parte, a natureza do controle ótimo. Isto é, o controle resultante pode ser linear, não linear, estacionário ou invariante no tempo, dependendo da forma do índice de desempenho [Ogata, 1982].

Seja o sistema dado pelas equações (4.3) e (4.4). Considera-se o problema de controle ótimo de determinar a matriz  $K_r$  do vetor de controle

$$u(t) = -K_r x(t) \quad (4.17)$$

de tal modo a minimizar

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.18)$$

onde  $Q$  é uma matriz positiva definida (ou positiva semi-definida) real e simétrica, e  $R$  uma matriz positiva-definida real e simétrica.

Note que o segundo termo do lado direito da equação (4.18) se relaciona com o gasto de energia dos sinais de controle. As matrizes  $Q$  e  $R$  determinam a importância relativa do erro (ponderação sobre o estado) e o gasto desta energia. Considera-se que  $u(t)$  não sofre restrições.

A equação (4.17) é a lei de controle ótimo. Portanto, se os elementos desconhecidos da matriz  $K_r$  são determinados de tal forma a minimizar o índice de desempenho (equação 4.18), então a equação (4.17) é ótima para qualquer estado inicial  $x(0)$ . Substituindo a equação (4.17) em (4.3), obtém-se:

$$\dot{x} = (A - BK_r)x$$

Considera-se que a matriz  $(A - BK_r)$  é estável, ou seja, que os seus autovalores têm partes reais negativas. Substituindo a equação (4.17) na equação (4.18), resulta:

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + K_r^T R K_r) x dt$$

Para resolver o problema de otimização de parâmetros, busca-se obter  $P$  da igualdade

$$x^T (Q + K_r^T R K_r) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x)$$

Desta forma, obtém-se

$$x^T (Q + K_r^T R K_r) x = \left[ \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \right]$$

$$= -x^T \left[ (A - BK_r)^T P + P(A - BK_r) \right] x$$

Comparando ambos os lados desta última equação e notando que esta deve ser verdadeira para qualquer  $x$ , impõe-se que:

$$(A - BK_r)^T P + P(A - BK_r) = -(Q + K_r^T R K_r) \quad (4.19)$$

Pelo segundo método de Liapunov, se  $(A - BK_r)$  é uma matriz estável, então existe uma matriz positiva-definida  $P$  que satisfaz a equação (4.19). Ainda, notando que  $x(\infty) = 0$ , o índice de desempenho pode ser escrito como

$$J = x^T(0) P x(0) \quad (4.20)$$

Como se supôs que  $R$  é uma matriz positiva definida real e simétrica, pode-se escrever  $R = T^T T$ , onde  $T$  é uma matriz não singular. Então, a equação (4.19) pode ser escrita como [Ogata, 1982]

$$(A^T - K_r^T B^T) P + P(A - BK_r) + Q + K_r^T T^T T K_r = 0$$

que pode ser colocada na forma

$$A^T P + PA + \left[ TK_r - (T^T)^{-1} B^T P^T \right]^T \left[ TK_r - (T^T)^{-1} B^T P \right] - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

A minimização da equação (4.20) com relação a  $K_r$  requer a minimização de

$$x^T \left[ TK_r - (T^T)^{-1} B^T P^T \right]^T \left[ TK_r - (T^T)^{-1} B^T P \right] x$$

Como este valor é não-negativo, o mínimo ocorre quando esta se anula, ou quando

$$TK_r = (T^T)^{-1} B^T P$$

portanto,

$$K_r = (T^T T)^{-1} B^T P$$



- propriedades físicas                    -peso, tamanho e comprimento
  - fatores de qualidade                    -durabilidade e manutenção
  - custo                                        -facilidade de testes e manutenção
- 3) Selecionar o atuador. Fatores que influem na seleção do elemento que controla a resposta:
- tecnológica                                -elétrica, hidráulica, pneumática e térmica.
  - performance funcional                -força máxima, velocidade máxima e eficiência.
  - propriedades físicas                    -peso, tamanho e rigidez.
- 4) Fazer um modelo linear. Escolhe-se o melhor para o processo, o atuador e o sensor; identifica-se o ponto de equilíbrio de interesse e constrói-se um modelo válido para todo o espectro de frequência.
- 5) Tentar um projeto proporcional-derivativo. Constrói-se um diagrama de Bode para um modelo planta–atuador-sensor. Considera-se o efeito do ruído. Se não funcionar:
- 6) Tentar um projeto ótimo. Plota-se a resposta do sistema em malha aberta e avaliam-se as suas margens de estabilidade e robustez a variações de parâmetros.
- 7) Construir um modelo no computador e avaliar o desempenho do projeto. O modelo deve incluir não linearidades tais como a saturação do atuador, fontes realísticas de ruídos e variações paramétricas. A simulação confirmará a estabilidade e a robustez e ajudará a prever o desempenho do sistema.

No próximo capítulo são mostradas simulações e a análise de resultados para diferentes tipos de controle, tais como: controle clássico, por alocação de pólos com retorno de estado e LQR, para o sistema de três graus de liberdade.

## 5 - ANÁLISE DE RESULTADOS PARA O SISTEMA DE 3 GRAUS DE LIBERDADE

Nesta seção, são apresentadas simulações e análise dos resultados obtidos com os controles citados no capítulo anterior. Para tais simulações, usou-se como condições iniciais  $z(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  e  $\phi(0) = 0$ . As simulações foram obtidas gerando uma perturbação inicial, deixou-se o sistema evoluir em malha aberta durante um curto intervalo de tempo e após este intervalo aplicou-se o controle.

Primeiramente, os resultados serão mostrados em malha aberta, a fim de que se possa ter melhores condições para avaliar o desempenho dos controladores em malha fechada. Obviamente, em malha aberta há apenas o controle passivo (amortecedor físico).

### 5.1 – Resultados via controle clássico

A seguir, são mostrados os deslocamentos em função do tempo para o sistema de três graus de liberdade usando o controle clássico do tipo proporcional com retorno de velocidade, aplicado de forma independente em cada uma das rodas, onde as equações governantes foram descritas na seção 3.4, dadas pelas equações (3.22), (3.23) e (3.24), respectivamente.

A Fig. 5.1 mostra simulações em malha aberta e fechada (da posição), onde se aplica uma força de  $-10000\text{Nm}$  durante os primeiros  $0,05\text{s}$  e depois, de  $10000\text{Nm}$  durante os  $0,05\text{s}$  seguintes na posição 1 (conforme Fig. 3.6). A partir daí, não se aplica mais nenhum tipo de perturbação externa, sendo  $dt = 0,01$ , e aplica-se forças de controle  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  e  $f_4$  independentes em cada roda do automóvel. O sistema evolui durante dez passos de discretização e só a partir deste instante é aplicado o controle. De forma a tentar reproduzir o efeito de uma implementação prática, as forças de controle  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ , e  $f_4$  permanecem constantes durante um passo de discretização, embora a dinâmica continue evoluindo a cada passo de integração; os dados utilizados foram os mesmos da camionete da seção 3.5.1 submetida à força anteriormente indicada.

Assim, na Fig. 5.1, pode-se comparar as posições (do CM e angulares) em malhas aberta e fechada do sistema. Nota-se que em malha aberta as vibrações são atenuadas em 6s, pois só o amortecedor está atuando no sistema; por outro lado, em malha fechada, as vibrações foram atenuadas em 4s e a amplitude manteve-se a mesma (com relação à resposta em malha aberta) no início da resposta em malha fechada.

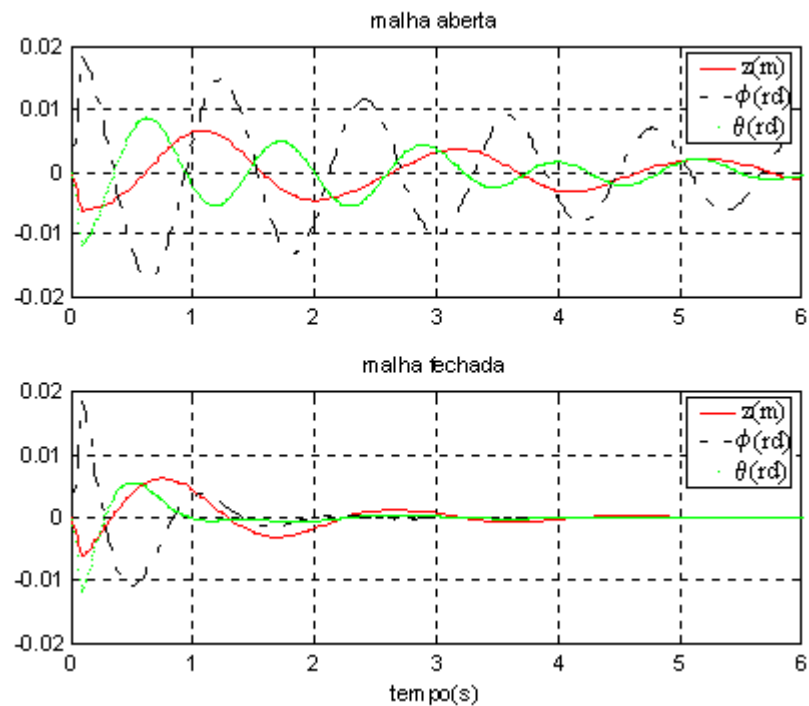


Fig. 5.1 –Ativação em malha aberta e fechada (posição) utilizando o controle clássico

De forma semelhante, na Fig. 5.2 compara-se os resultados em malha aberta e fechada para a velocidade. O sistema tende a zero num intervalo de tempo inferior a 4s e a amplitude permanece a mesma (com relação à resposta em malha aberta) no início da resposta em malha fechada.

A Fig. 5.3 mostra as quatro forças de controle aplicadas em cada roda do automóvel. Esta simulação contou com uma ativação em malha aberta dos modos de vibração, ativação esta realizada por uma força de perturbação -10000N durante os primeiros 0.05s e depois de 10000N durante os 0.05s seguintes. A partir de 0.1 s, a perturbação externa deixou de existir e passaram a atuar as forças de controle (visto na Fig. 5.3).



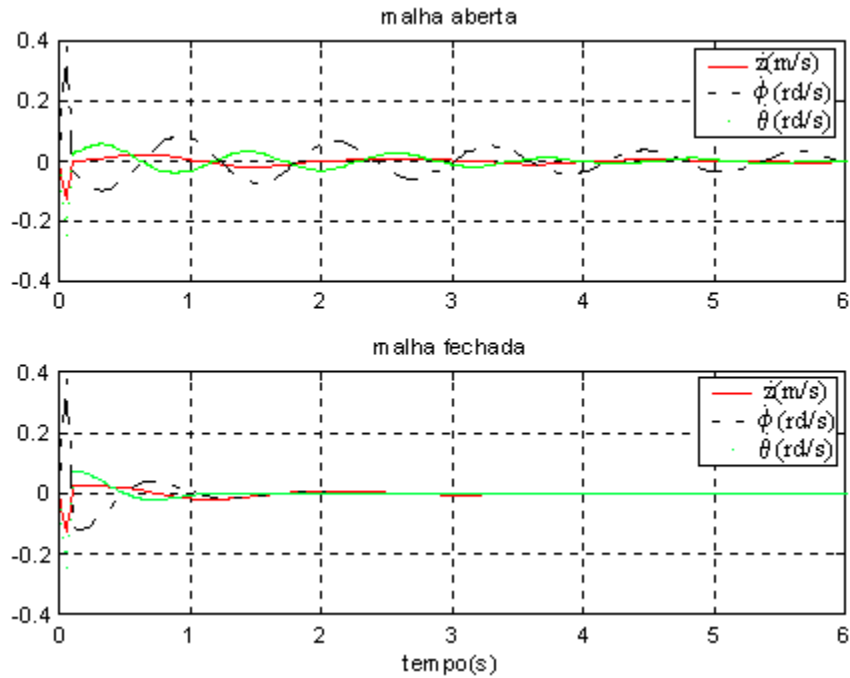


Fig. 5.2–Ativação em malha aberta e fechada (velocidade) utilizando o controle clássico

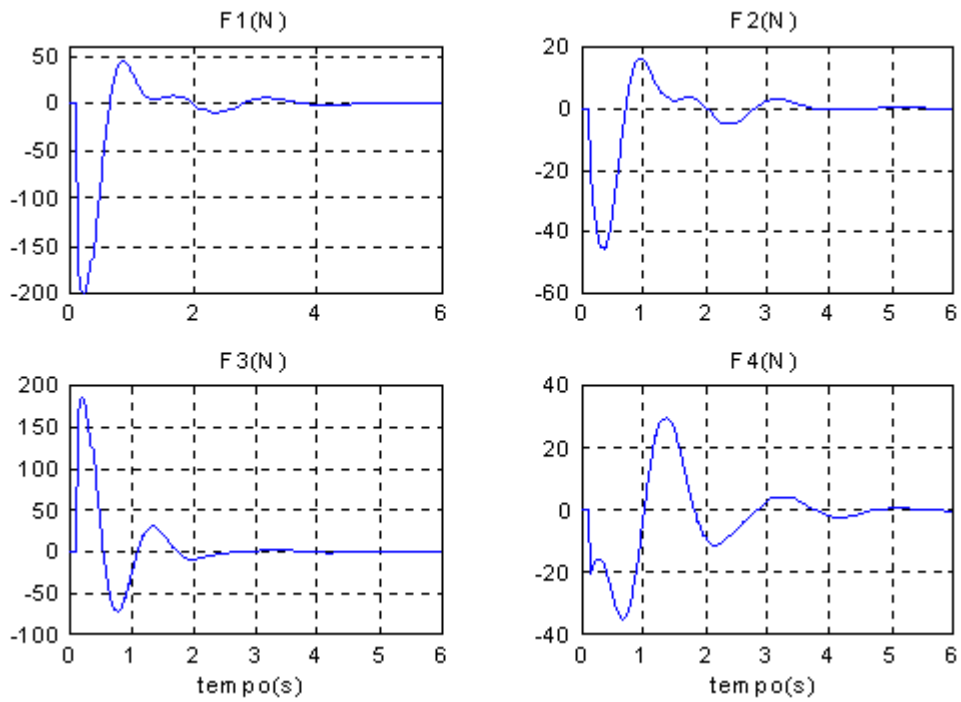


Fig. 5.3 – Forças de controle em cada roda do veículo

Feitas às simulações com o controle clássico, na próxima seção, serão mostradas as simulações obtidas com o controle por alocação de pólos, para o mesmo sistema de três graus de liberdade.

### 5.2 - Resultados via controle por alocação de pólos

Neste caso, trata-se de um controle com realimentação de estado, com uma única entrada (controle  $u = \{F, -FL_4, FL_1\}$  é um escalar), mas com a condição de aplicação de uma força na direção  $z$  (aceleração linear do CM igual a  $(1/m)*u$ ), um torque sobre o eixo longitudinal  $x$  (aceleração angular sobre o eixo  $x$  igual a  $(1/I_x)*u$ ) e um torque sobre o eixo longitudinal  $y$  (aceleração angular sobre o eixo  $x$  igual a  $(1/I_y)*u$ ). Para  $t \geq 10*dt$ , aplica-se ao veículo uma força na direção  $z$ , e dois torques, um sobre o eixo  $x$  e outro sobre o  $y$ , simultaneamente. Para este caso, utilizou-se o sistema do tipo:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bv$$

onde  $Bv$  é a força externa aplicada ao sistema.

Foram elaborados dois projetos de controle; em cada um dos projetos foram testadas duas situações distintas para os pólos em malha fechada, onde os autovalores em malha aberta e fechada são dados por  $[\lambda_i(A)]$  e  $[\lambda_i(A - BK_r)]$  (Eq. (4.6)), respectivamente.

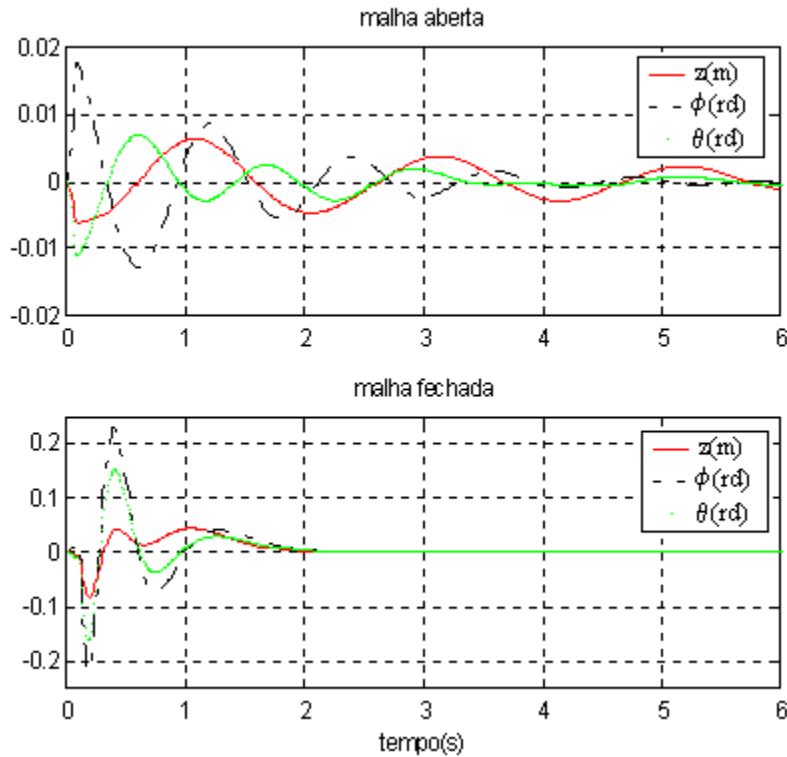
Assim, os valores dos pólos para o projeto 1 e projeto 2 adotados são:

Pólos (MF, projeto1)	Pólos(MF, projeto 2)	Pólos (MA)
-10.8020 + 4.4013i	-6.1726 + 5.5016i	-0.2337 + 3.0483i
-10.8020 - 4.4013i	-6.1726 - 5.5016i	-0.2337 - 3.0483i
-9.8824 + 4.2133i	-5.6471 + 5.2666i	-0.7716 + 5.5016i
-9.8824 - 4.2133i	-5.6471 - 5.2666i	-0.7716 - 5.5016i
-3.2713 + 2.4386i	-1.8693 + 3.0483i	-0.7059 + 5.2666i
-3.2713 - 2.4386i	-1.8693 - 3.0483i	-0.7059 - 5.2666i

**Tabela 5.1 – Tabela dos pólos em malha fechada (MF) e malha aberta (MA) para os projetos 1 e 2**

A Fig. 5.4 mostra os resultados de simulações realizadas em malhas aberta e fechada (para posição e velocidade) utilizando o projeto 1. Observa-se que nesse projeto exige-se mais desempenho do controlador, ou seja, as vibrações são atenuadas num intervalo de tempo de 2s mas, por outro lado, aumentando a

amplitude no início da resposta em malha fechada (com relação ao resultado em malha aberta). Como as amplitudes em malha aberta são muito pequenas em relação a malha fechada, as figuras não foram colocadas na mesma escala. O mesmo ocorre para os casos posteriores.



**Fig. 5.4 – Simulação em malha aberta e fechada (posição) por alocação de pólos para o projeto 1**

Ainda para o projeto 1, compara-se as velocidades em malhas fechada e aberta, conforme mostra a Fig. 5.5. Verifica-se que o sistema tende a zero num tempo de aproximadamente 2s, mas com aumento significativo nas amplitudes iniciais de oscilação em malha fechada, sendo isso um resultado não desejável.

A Fig. 5.6 mostra o sinal de controle  $u$ . Deve ser lembrado que esta simulação contou com uma ativação em malha aberta dos modos de vibração, ativação esta realizada por uma força de perturbação - 10000N durante os primeiros 0.05s e depois de 10000N durante os 0.05s seguintes, sobre a roda dianteira direita. A partir de 0.1 s, a perturbação externa deixou de existir e passou a atuar o controle  $u$  (visto na Fig. 5.6).

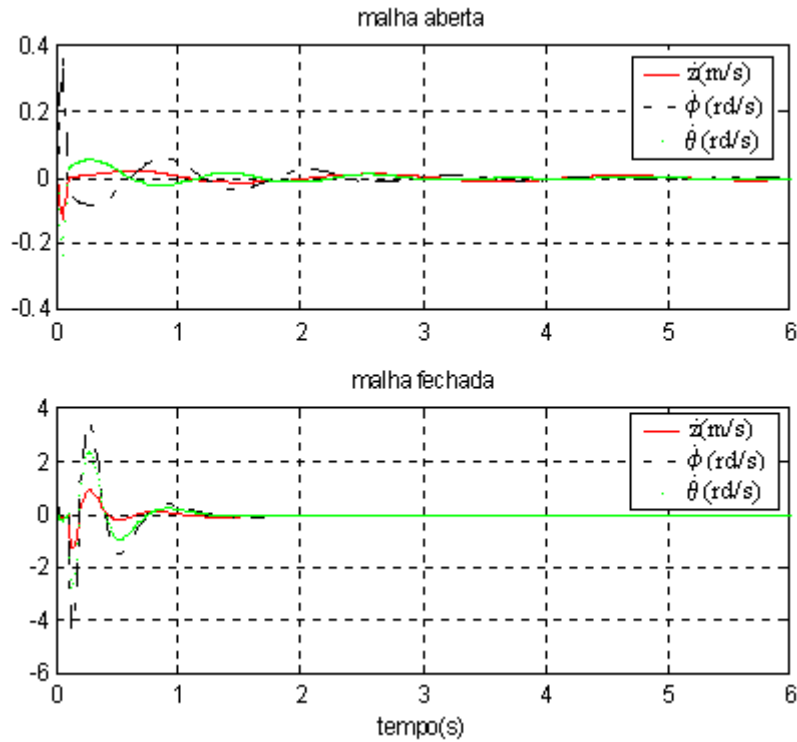


Fig. 5.5 – Simulação em malha aberta e fechada (velocidade) com alocação de pólos para o projeto 1

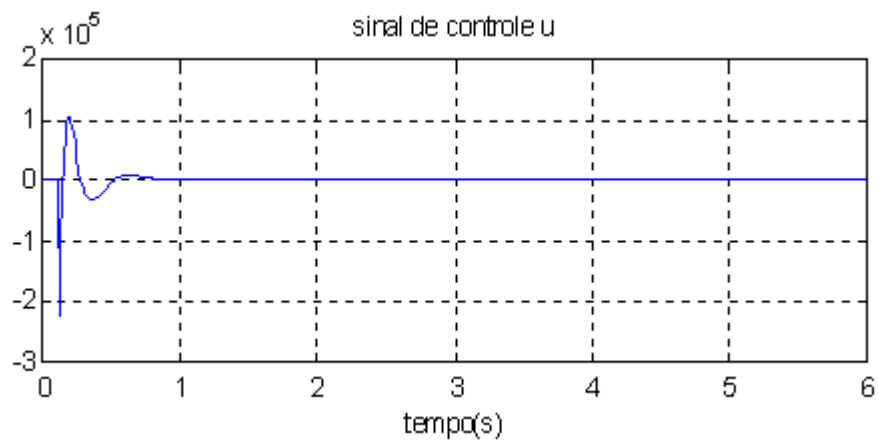


Fig. 5.6 – Sinal de controle u para o projeto 1

De forma semelhante, a Fig. 5.7 mostra os resultados em malha aberta e fechada para as posições utilizando o projeto 2. Neste, exige-se menos desempenho do controlador onde as vibrações são atenuadas num tempo maior, sem induzir um acréscimo significativo nas amplitudes no início da resposta em malha fechada.

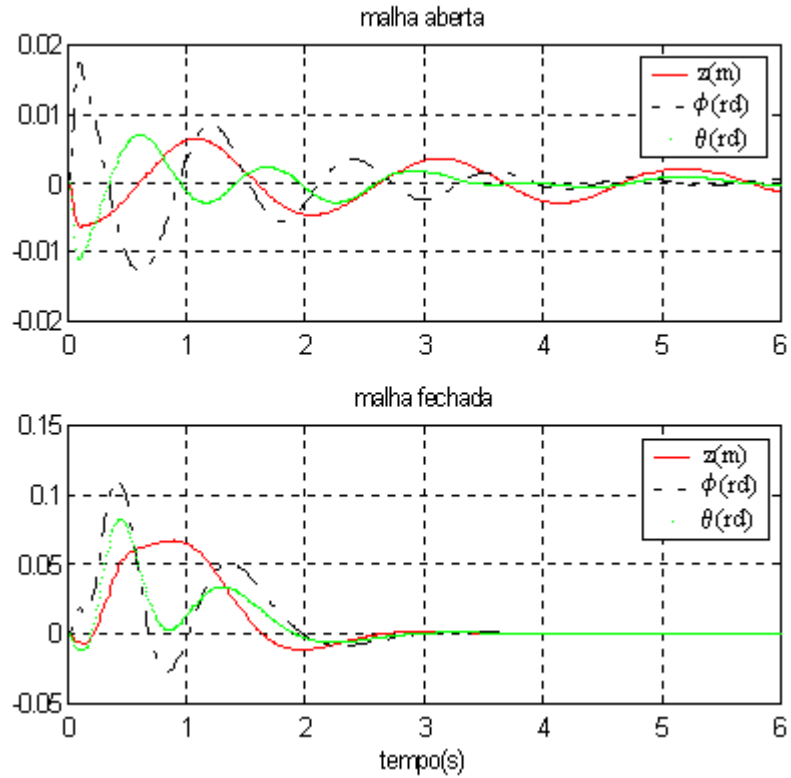


Fig. 5.7 – Simulação em malha aberta e fechada (posição) com alocação de pólos para o projeto 2

Para o projeto 2, também comparou-se as velocidades em malha fechada e em malha aberta, como mostra a Fig. 5.8. Verifica-se que o sistema tende a zero num intervalo de tempo maior que 2s, sem induzir com isso um aumento significativo nas amplitudes das oscilações em malha fechada.

**A Fig. 5.9 mostra o sinal de controle  $u$ , sendo que para um intervalo de tempo inferior a 0.1 o controle aplicado é zero (apenas a já referida força de perturbação atua durante este intervalo).**

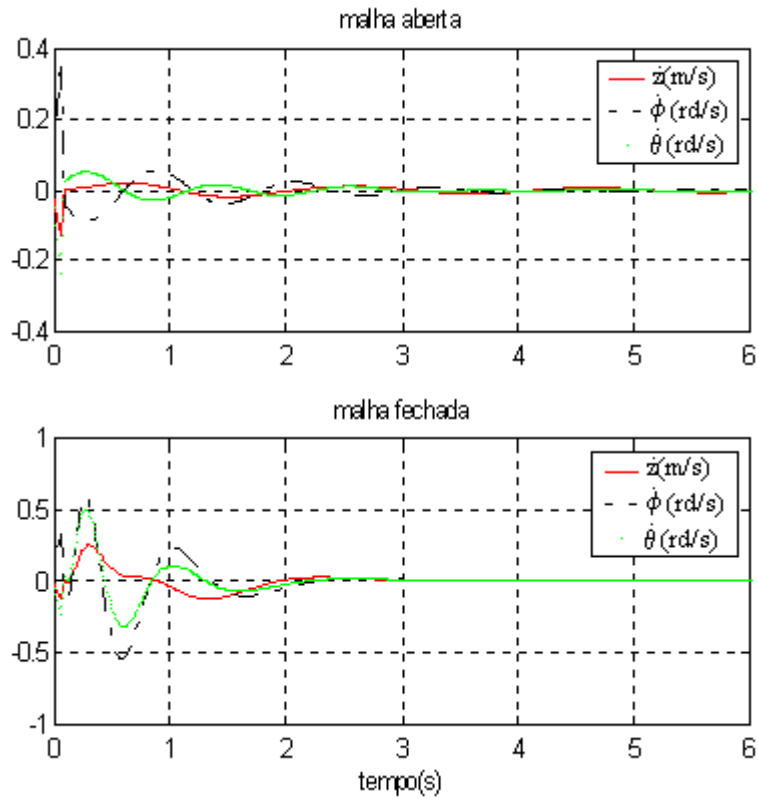


Fig. 5.8 – Simulação em malha aberta e fechada (velocidade) com alocação de pólos para o projeto 2

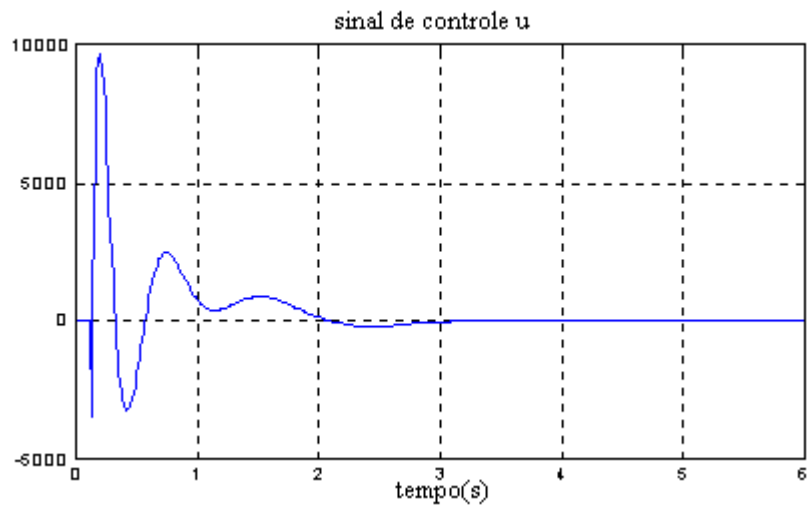


Fig. 5.9 – Sinal de controle u para projeto 2

A seguir, apresentam-se as simulações feitas com o controle LQR, a fim de que, posteriormente, seja possível então concluir sobre os resultados obtidos pelos diferentes métodos.

### 5.3 - Resultados via controle LQR

Nesta seção, as simulações foram feitas via controle LQR usando o sistema (4.52) referido na seção 4.4.4 sendo as condições iniciais utilizadas as mesmas citadas anteriormente.

Indica-se na tabela 5.2, para o controle ótimo, os pólos em malha fechada e aberta adotados. Os autovalores em malha aberta e fechada são dados por  $[\lambda_i(A)]$  e  $[\lambda_i(A - BK_r)]$ , respectivamente:

Pólos (MF)	Pólos (MA)
-8.8958+6.6533i	-0.2337 + 3.0483i
-8.8958-6.6533i	-0.2337 - 3.0483i
-1.2860 +4.5240i	-0.7716 + 5.5016i
-1.2860 -4.5240i	-0.7716 - 5.5016i
-0.7925 + 5.4831i	-0.7059 + 5.2666i
-0.7925 -5.4831i	-0.7059 - 5.2666i

Tab. 5.2 - Tabela dos pólos em malha fechada e aberta para o controle ótimo

Na Fig. 5.10 mostram-se os resultados em malha aberta e fechada para as posições, utilizando o controle LQR. Comparando ambos os resultados, verifica-se que se exige pouco desempenho do controlador, pois as vibrações levam aproximadamente 4s para serem atenuadas, mas sem ocorrer aumento das amplitudes de oscilação no início da resposta em malha fechada (relativas às amplitudes ocorridas em malha aberta).

Na Fig. 5.11 comparam-se as velocidades em malhas aberta e fechada. Nesta, as vibrações tendem a zero em 4s, sem com isso aumentar as amplitudes no início da resposta em malha fechada.

**Mostra-se na Fig. 5.12 o sinal de controle  $u$ , sendo que para um intervalo de tempo inferior a 0.1s o controle é zero.**

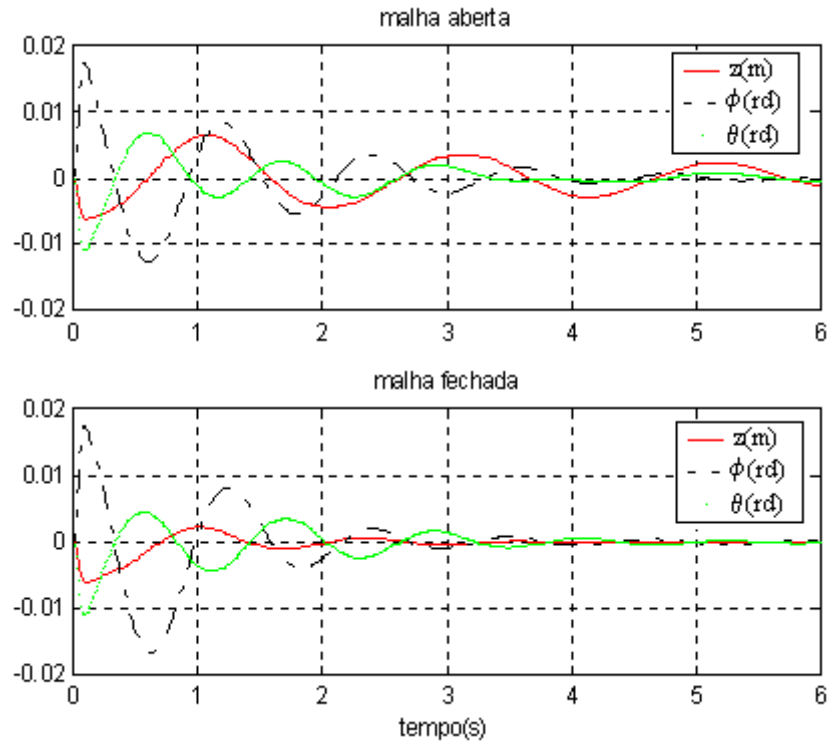


Fig. 5.10 – Simulação em malha aberta e fechada (posição), controle LQR

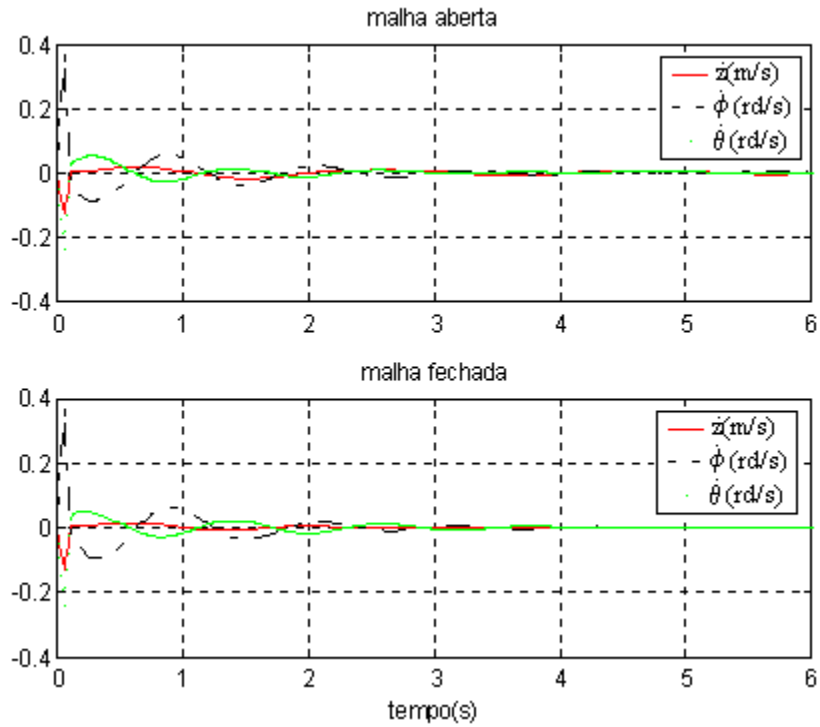
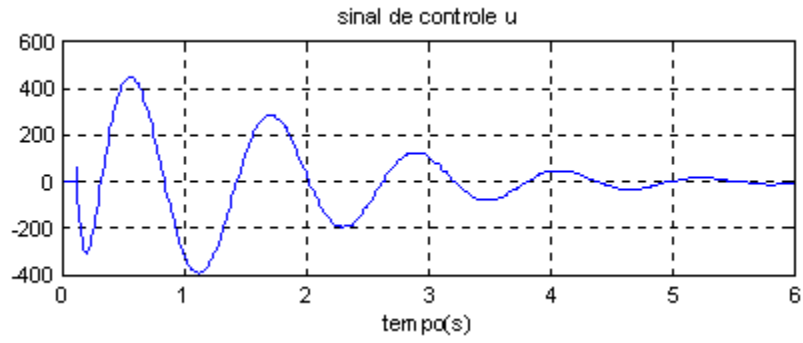


Fig. 5.11 – Simulação em malha aberta e fechada (velocidade), controle LQR





**Fig. 5.12 – Sinal de controle u para o controle LQR**

Assim, obtidos resultados para os três tipos de controle, no próximo capítulo apresenta-se as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

## 6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

É importante salientar que os desenvolvimentos matemáticos contidos nesta dissertação foram feitos “manualmente” e também com o auxílio de *softwares* como o MATLAB e MAPLE.

Indica-se que dentre os métodos numéricos utilizados, o de diferenças finitas possui convergência lenta e os passos de integração  $\Delta t$  têm que ser pequenos; no entanto, o método de Runge-Kutta (com controle automático do passo de integração) têm baixa dissipação, é auto-inicializável e eficiente.

Analisando as simulações feitas no capítulo anterior, onde foram obtidos resultados para três tipos de controles, verifica-se que o controle clássico, ou seja, controle proporcional com retorno de velocidade aplicado independentemente em cada roda do veículo, apresentou o melhor compromisso entre complexidade de implementação e desempenho, ou seja, este controlador clássico é extremamente simples; portanto, permite uma fácil implementação em tempo real. Este resultado aliado à sua conhecida característica de robustez de estabilidade lhe garantem a condição de implementação prática com condições reais de bom funcionamento.

No controle por alocação de pólos foram analisados dois tipos de projetos. No primeiro verificou-se que exigindo mais desempenho do controlador, as vibrações são atenuadas num tempo menor, induzindo a um acréscimo nas amplitudes no início da resposta em malha fechada. Já no projeto 2, exigiu-se menos desempenho do controlador e as vibrações tendem a zero num tempo maior, sem aumentar significativamente as amplitudes das oscilações no início da resposta em malha fechada.

No controle via LQR também se comparou os resultados em malhas aberta e fechada para as posições e verificou-se que se exigiu pouco desempenho do controlador, pois as vibrações levam aproximadamente 4s para serem atenuadas, mas sem ocorrer aumento das amplitudes no início da resposta em malha fechada.

Então, conclui-se que os sistemas de controle testados realmente funcionam. O amortecimento das oscilações provocadas por perturbações em malha aberta ocorre para intervalos de tempo tão pequeno quanto se desejar no projeto de controle. Esta exigência em desempenho tem um alto custo, manifestado por grandes amplitudes de oscilações no

início da aplicação do controle e ainda, por necessitar de atuadores com capacidade de aplicar forças de grande intensidade.

Como o principal objetivo deste trabalho era simular e controlar um sistema de suspensão, então cabe ainda ressaltar que, de acordo com a pesquisa bibliográfica realizada, o desgaste excessivo da suspensão leva a uma menor estabilidade em curvas, maior distância de frenagem, aumenta a possibilidade de derrapagem em solo molhado, acentua o desgaste de outros elementos mecânicos e aumenta a fadiga do condutor.

Para finalizar, indica-se como sugestão para trabalhos futuros introduzir no modelo de três graus de liberdade as forças representativas da frenagem, imperfeições do solo, compensação nas curvas e da pressão aerodinâmica, por exemplo, e desenvolver para o sistema um controlador com estimação de estado com características de robustez. Enfatiza-se que muito se ouve falar sobre o controle de suspensões automobilísticas, no entanto muito pouco especificamente sobre isso, em termos científicos, é apresentado na literatura disponível. Os resultados preliminares mostrados neste trabalho vão nesta direção.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTAVINI, R., B., “Comportamento Dinâmico de Veículos sobre Diferentes Condições de Pista – Modelagem, Simulação e Visualização de Movimentos com Auxílio de Computação Gráfica”, <http://www.fem.unicamp.br/~ilmar/projetos/rafael1.html>, 2001.

BATHE, K. J., “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”, Prentice Hall, 1982.

BHAT, S. P., TANAKA, M. and MIU, D. K., “Experiments on Point-to-Point Position Control of a Flexible Beam Using Laplace Transform Technique-Part I: Open-Loop”, *Jornal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 113, pp. 432-437, 1991.

BOLTON W., “Engenharia de Controle”, Makron Books, 1995.

CASTRUCCI, P. B. L., “Controle Automático: Teoria e Projeto”, Edgard Blücher, São Paulo, 1960.

CHEVALLEREAU, C. and Aoustin, Y., “Nonlinear Control of a 2 Flexible Link Robot: Experimental and Theoretical Comparisons”, *European Control Conference*, Grenoble, France, pp. 1051-1056, 1991.

CHOLLET, H. M., “Curso Prático e Profissional para Mecânicos de Automóveis. O veículo e seus componentes”, Hemus, 1981.

COOK, R. D., “Concepts and Applications of Finite Element Analysis”, John Wiley & Sons, 1981.

CRUZ, J. J., “Controle Linear Robusto Multivariável”, EDUSP, 1996.

DIAS, T., “Citröen mostra 3ª Geração de Suspensões Inteligentes”, <http://www.Mecanicaonline.Matrix.com.br/2000/abril/tecnovidade/suspensao inteligente.html>, 2000.

DISTEFANO, J. J., STUBBERUD, A. R., WILLIAMS, I. J., “Sistema de Retroação de Controle”, Macgraw-Hill, 1979.

DYM, C. L., SHAMES, I. H., “Solid Mechanics: a Variational Approach”, Mcgraw-Hill, 1973.

FIAT, “Conheça seu Fiat”, <http://www.fiat.com.br>, 2002.

FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., “Feedback Control of Dynamic Systems”, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

GOMES, S. C. P., “Modelagem e Controle de Manipuladores Flexíveis”, 10º Congresso Brasileiro de Automática/6º Congresso Latino Americano de Controle Automático, Rio de Janeiro, Vol. 2, pp. 1010-1015, 1994.

HAC, A.; YOUN, I., “Optimal Design of Active and Semi-active Suspensions Including Time Delay and Preview”, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 498-508, 1993.

INMAN, D. J., “Engineering Vibration”, Prentice-Hall, 1994.

KOMATSU, T., UENOHARA, M., IIKURA, S., MIURA, H. and SHIMOYAMA I., “Active Vibration Control of a Multi-link Space Flexible Manipulator with Torque Feedback”, Journal Robotics Society of Japan, Vol. 6, No. 1, pp. 23-39, 1992.

KUO, B. C., “Automatic Control Systems”, Prentice Hall, 1995.

MACHADO, C. C., “Um Estudo sobre Controle de Estruturas Flexíveis Ativadas por Escoamento de Fluidos”. Dissertação de mestrado, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 1999.

MACHADO, C. C., GOMES S. C. P., DE BORTOLI, A. L., “Controle Robusto de Estrutura Flexíveis Ativadas por Escoamentos de Fluidos”, COBEM 1999.

MARSAL, F. J., “Dinâmica de Veículos – Modelagem, Simulação e Visualização de Movimentos com Auxílio de Técnicas de Computação Gráfica”, <http://www.fem.unicamp.br/~ilmar/projetos/fernad1.html>, 2001.

MEIROVITCH, L., “Elements of Vibration Analysis”, Mcgraw-Hill, 1975.

MIU, D. K., “Physical Interpretation of Transfer Function Zeros for Simple Control Systems with Mechanical Flexibilities”, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 113, pp. 419-424, 1991.

OGATA, K., “Engenharia de Controle Moderno”, Prentice Hall, Rio de Janeiro, 1982.

OLIVEIRA, P. R., “Suspensão”, <http://br.geocities.com/prcoliveira2000/suspensao.html>, 2000.

PADOVESE, G. C., “Mecanismos Ativos – Modelagem, Simulação, Projeto e Construção de um Protótipo de Suspensão Ativa Auxiliado por Computador”, <http://www.fem.unicamp.br/~ilmar/projetos/pado1.html>, 2001.

PEREIRA, A. E. L., “Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis”, Dissertação de Mestrado, UFRGS - PPGMAP, 1999.

PEREIRA, A. E. L., GOMES, S. C. P., DE BORTOLI, A. L., “Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis (Parte I)”, CONEM 2000.

PEREIRA, A. E. L., GOMES, S. C. P., DE BORTOLI, A. L., “Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis (Parte II)”, CONEM 2000.

PHILLIPS, C. L., HARBOR, R. D., “Sistema de Controle e Realimentação”, Ed. Afiliado, 1996.

RIBEIRO, F. J., NETO, A. F. M., “Controle Ativo de Vibrações em Rotores Flexíveis Usando o Método LQG/LTR”, COBEM-CIDIM, 1995.

RUY, J., KWON, D. and PARK, Y., “A Robust Controller Design for a Flexible Manipulator with a Time Varying Payload and Parameter Uncertainties”, IEEE-International Conference on Robotics and Automation, Detroit, Michigan, May 1999.

SAMPAIO, R., CATALDO, E., RIQUELME, R., ”Introdução à Dinâmica, Estabilidade e Controle Através do MATLAB.”, XX CNMAC – Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1997.

SCHMITZ, E., “Experiments on the End-Point Control of a Very Flexible One-Link Manipulator”, Ph.D. Thesis, Stanford, California, Unites States, 1985.

SETO, W. W., “Vibrações Mecânicas”, Mcgraw-Hill, Rio de Janeiro, 1971.

SIGHIERI, L., NISHINARI, A., “Controle Automático de Processos Industriais”, Edgard Blücher, 1987.

SOARES, A. M. S., GÓES, L. C. S., “Modelagem e Identificação Experimental de um Elo Robótico Flexível”, 10<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Automática/6<sup>o</sup> Congresso Latino Americano de Controle Automático, Rio de Janeiro, Vol. 2, pp. 1022-1027, 1994.

SOARES, A. M. S., “Modelagem e Identificação Experimental de Estruturas Flexíveis”. Tese de Doutorado, ITA, São José dos Campos, Brasil, 1997.

SOMOLINOS, J. A., FELIU V., SÁNCHEZ, L. and CERRADA, J. A., “Modeling and Control of a New Three-degree-of-freedom Flexible Arm with Simplified Dynamics”, IEEE – International Conference on Robotics and Automation, Detroit, Michigan, 1999.

SRIDHAR, B., AUBRUN, J. and LORELL, K. R., “Identification Experiment for Control of Flexible Structures”, IEEE Control Systems Magazine, pp.29-35, 1985.

TAMBOLI, J. A., JOSHI, S. G., “Optimum Design of a Passive Suspension System of a Vehicle Subjected to Actual Radom Road Excitations”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, pp. 193-205, 1999.

TOBOLDT, W. K., PURVIS, J., “New Automotive Encyclopedia – Complete Course in Automotive Mechanics with Special Enphasis on Fundamental Principles, Thouble Shooting”, the Goodheart-Willcox Co., INC.,1954.

TREVISO, A., “Pilotando com o Makinen”, [http:// www.terra.com.br/motorpress/ carro/carro90/88/comparativo.html](http://www.terra.com.br/motorpress/carro/carro90/88/comparativo.html), 2001.

THOMSON, W. T., “Teoria da Vibração”, Interciência, 1978.

YOSHIDA, Y. and TANAKA, M., “Tip Position Control of a Flexible Robot Arm Considering the Reduction Gear’s Friction”, Journal of Robotics & Mechatronics, Vol. 2, pp. 91-96, 1990.